

Instituto Superior del Profesorado de Salta
 Profesorado en Matemática

Geometría I
 Trigonometría

Trabajo Práctico 1

- (a) Usando un triángulo equilátero de lado unidad, encontrar los valores del $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{6}$, $\tan \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{3}$, $\tan \frac{\pi}{3}$
- (b) Usando un cuadrado de lado unidad encontrar los valores de $\sin \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{4}$, $\tan \frac{\pi}{4}$
- (c) Completar la siguiente tabla con el auxilio del círculo trigonométrico

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|--------|--------------------|---------------------|--------------------|------------------|
| | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | π | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | 2π | $\frac{133\pi}{4}$ | $\frac{2000\pi}{3}$ | $-\frac{27\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ |
| $\sin \alpha$ | | | | | | | | | | | | | | |
| $\cos \alpha$ | | | | | | | | | | | | | | |
| $\tan \alpha$ | | | | | | | | | | | | | | |

1. Deducir con el uso del círculo trigonométrico la validez de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha & \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin \alpha &= -\sin(-\alpha) & \cos \alpha &= \cos(-\alpha) \end{aligned}$$

2. Verificar las siguientes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} i) \quad \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha &= 1 & ii) \quad \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} &= 4 \tan \alpha \sec \alpha^3 x \\ iii) \quad \frac{\csc x - \sin x}{\sec x - \cos x} &= \cot & iv) \quad \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \\ v) \quad \sec x + \tan x &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} & vi) \quad \frac{\csc x}{\cot x + \tan x} &= \cos x \\ vii) \quad \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \sec x & viii) \quad \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha &= (\sin x - \cos x)(1 + \cos x \sin x) \end{aligned}$$

3. Complete la siguiente tabla donde debe escribirse en cada celda la expresión de la función de la fila correspondiente en función de la columna correspondiente

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | $\sin x$ | $\cos x$ | $\tan x$ | $\sec x$ | $\csc x$ | $\cot x$ |
| $\sin x$ | - | | | | | |
| $\cos x$ | | - | | | | |
| $\tan x$ | | | - | | | |
| $\sec x$ | | | | - | | |
| $\csc x$ | | | | | - | |
| $\cot x$ | | | | | | - |

4. La radiación solar en Salta Capital, sobre una superficie horizontal, cuando el sol pasa por el meridiano, alcanza el 21 de diciembre el valor máximo de 1100w/m^2 . Mientras que el 21 de Junio en idénticas condiciones alcanza su valor mínimo de 800w/m^2 . La radiación solar ϕ en función del tiempo transcurrido t a partir del primero de enero se puede aproximar como:

$$\phi(t) = A + \sin(kt - \alpha)$$

Donde A , k y α son constantes. Calcular la radiación del día 31 de Mayo y del 2 de octubre. Realizar la gráfica.

5. Un oscilador armónico simple (por ejemplo un resorte) tiene por ecuación de movimiento $x(t) = A \sin(\omega t - \theta)$, donde $x(t)$ es la posición medida a partir de la posición de equilibrio del oscilador en función del tiempo transcurrido. Suponga que se trate de un resorte y que $A = 1\text{mm}$ sea la máxima elongación del resorte, $\omega = 2\text{Rad/seg}$ la velocidad angular y que $\theta = \pi/4$ en radianes. ¿En que posición estará el resorte cuando se arranca el cronómetro? ¿Cuándo recorrerá un ciclo completo? ¿Dónde se encontrará cuando transcurran 2 segundos?. Realizar la gráfica de la posición versus el tiempo transcurrido.
6. Responde verdadero o falso justificando. Observe las figuras siguientes

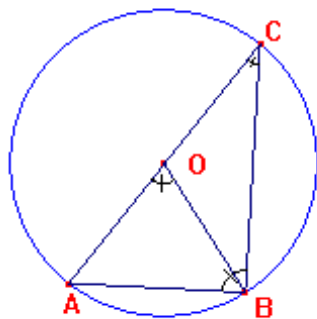


Figura 1

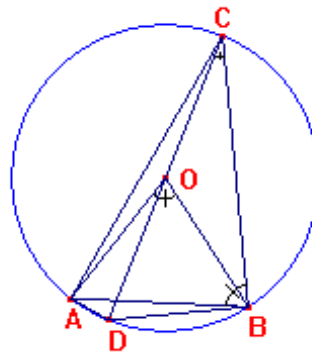


Figura 2

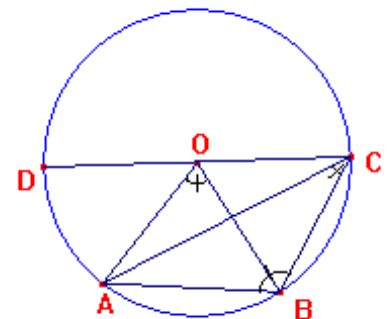
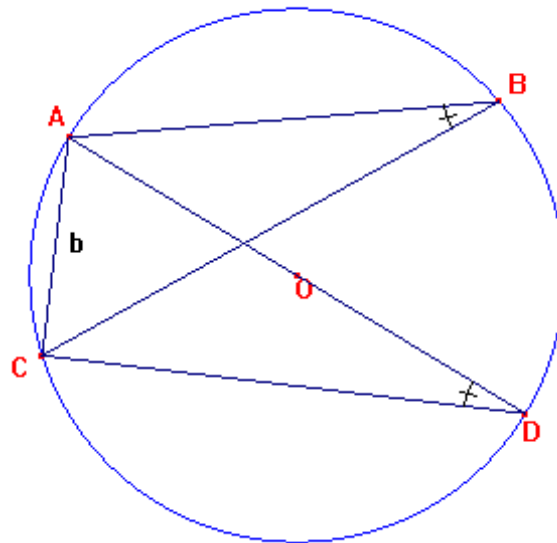


Figura 3

- (a) Muestre que, en la figura 1, \widehat{ACB} es la mitad de \widehat{AOB} (Recuerde que la suma de los ángulos internos de un triángulo es π)
- (b) Demuestre que en las figuras 2 y 3 es cierta la afirmación del inciso anterior (Aplique el resultado del inciso anterior a los ángulos \widehat{ACD} y \widehat{DCB} ...)
- (c) Muestre que \widehat{ABC} es recto en la figura 1.

- (d) En la figura 2 demuestre que $\widehat{ACB} + \widehat{ADB} = \pi$
- (e) Justifique que cualquier ángulo inscrito en una circunferencia que subtende una cuerda a es la mitad del ángulo central que subtende la misma cuerda a , o su complementario, dependiendo del lado de la cuerda donde se encuentre el vértice del ángulo inscrito.

7. Observe la siguiente figura para demostrar que

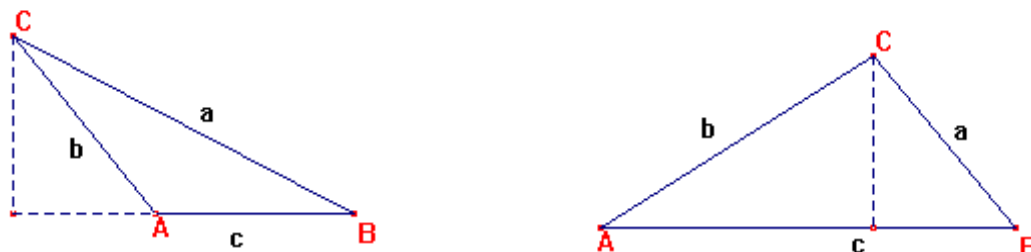


$2r = \frac{b}{\sin \beta}$, donde r es el radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC y β es el ángulo opuesto al lado b . (Sugerencia: use los resultados del ejercicio 6). Note que realizando el mismo trabajo para los otros lados se llega a

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

que es el teorema del seno generalizado.

8. Mostrar que en ambos casos mostrados en la figura siguiente se cumple que



- (a) $c = a \cos B + b \cos A$, o lo que es lo mismo $1 = \frac{a}{c} \cos B + \frac{b}{c} \cos A$
 - (b) Use el teorema del seno para mostrar que $\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}$
 - (c) Auxiliado por los dos incisos anteriores mostrar que $\sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A$
 - (d) Mostrar que $\sin C = \sin(\pi - A - B) = \sin(\pi - (A + B)) = \sin(A + B)$
 - (e) Demuestre que $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$ (Teorema de adición para el caso del seno)
 - (f) Demostrar el teorema de Pitágoras (Ecuación fundamental de la Trigonometría)
 - (g) Encontrar expresiones para $\sin(A - B)$, $\cos(A + B)$, $\tan(A - B)$
 - (h) Encontrar fórmulas para las funciones trigonométricas del ángulo doble y mitad
 - (i) Demostrar que $\sin(b + a) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$ y encontrar una expresión para $\sin x + \sin y$.
 - (j) Demostrar que $c^2 = (a \cos B + b \cos A)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (Teorema del coseno)
9. ¿Cuál es el valor del ángulo de disgresión λ de venus si la distancia de este planeta al sol es de $108.14 \times 10^6 \text{km}$ y la de la tierra al sol es de $1.5 \times 10^8 \text{km}$? (Suponer circulares las órbitas de ambos planetas)
10. Un piloto sale desde una ciudad A con un rumbo $38^\circ 40'$ al oeste del norte recorriendo 120km ; debido a una falla mecánica trata de regresar al punto de partida pero por un error viaja 120km en dirección $56^\circ 43'$ al sur del oeste. ¿A

que distancia se encontrará la ciudad A y en que dirección debe viajar para llegar al punto de partida?

11. Un poste que se aparta $10^{\circ}15'$ de la vertical hacia la región donde está el sol, proyecta una sombra de 40.75 pies de longitud cuando el ángulo de elevación del sol es de $40^{\circ}35'$. Encontrar la longitud del poste.
12. Un prisma rectangular tiene base 6×8 y una altura de 5. Calcular el ángulo de una diagonal principal del prisma y la base.
13. Una pirámide cuadrada tiene el vértice superior V y una base $ABCD$ de lado 6 unidades de longitud. Las aristas laterales son iguales y forman un ángulo de 54° con el plano $ABCD$. Calcular
 - (a) La altura de la pirámide
 - (b) la inclinación del plano VAB a la base.
14. A que altura h de la superficie terrestre se encuentra un punto A para el cual el ángulo de depresión del horizonte es igual a $7^{\circ}19'30''$ si se supone que el radio terrestre tiene aproximadamente $6370km$.
15. Encontrar el valor de $\cos \frac{\pi}{5}$, usando el hecho de que los triángulos \widehat{AOB} y $\widehat{A'OB'}$ marcados en la figura son semejantes y que el triángulo $AA'O$ es isosceles. (Sugerencia: ¿Cuáles son los ángulos que forman las diagonales con los lados?)

