Geometría Básica

Antonio Sángari

Agosto de 2002

Resumen

Este texto tiene cuatro capítulos fuertementemente correlativos. El primero de estos trata del Espacio comenzando inmediatamente por una formulación axiomática. El segundo capítulo se ocupa de las transformaciones rígidas en general y se le da especial importancia a las transformaciones involutivas. El Tercero se ocupa de los casos más comunes de transformaciones rígidas, o sea las simetrías, la traslación y la rotación. El cuarto trata de algunas aplicaciones clásicas pero tratadas con los recursos ya desarrollados

Índice General

0.1 Uso del Texto 2

1 Espacio, plano, rectas y puntos **3**

1.1 Introdución 3

1.2 Conjuntos de Puntos 3

1.2.1 Modelos 7

1.2.2 Semirrectas y semiplanos 7

1.2.3 Ángulos y triángulos 11

1.2.4 El semiespacio 13

2 Transformaciones en el plano **15**

2.1 Funciones de puntos 15

2.1.1 Funciones biyectivas 16

2.1.2 Conjuntos estables 17

2.2 Transformaciones rígidas en el plano 17

2.2.1 Congruencia 20

2.2.2 Transformaciones rígidas involutivas 22

3 Tipos de Transformaciones **24**

3.1 Simetría central 24

3.2 Simetría axial 26

3.2.1 Equidistancia de puntos a rectas 29

3.3 Traslaciones 31

3.3.1 Aplicaciones a cuadriláteros 34

3.3.2 Primeros tres criterios de congruencia de triángulos 35

3.3.3 Relaciones entre lados y ángulos de un triángulo 36

3.3.4 Cuarto caso de congruencias de triángulo 37

3.3.5 Intersecciones de Cevianas 37

3.3.6 El incentro 37

3.3.7 El circuncentro 39

3.3.8 El baricentro 40
3.4 Rotaciones 40

4 Problemas de Aplicación 43
4.1 El teorema del ángulo inscrito 43
4.2 El Problema de Fermát y el triángulo de Napoleón 45
4.3 Problema de Fagnano. 48
4.4 La Circunferencia de los Nueve Puntos y la Recta de Euler. 49

0.1.Uso del Texto

Este texto no es un texto técnico de Matemáticas, sino que pretende ser una guía para un curso elemental de geometría. Este es un texto orientado al lector que no tiene especialidad en geometría. Pero puede resultar tambien interesante para los que tengan que dictar el tema. Trata en lo posible de no ser un libro que sea costoso de entender pero que la mayor parte del trabajo para la comprensión sea del propio lector. Por eso se incluyen muchos ejercicios de tal modo que el lector construya sus propios conceptos.

La mayoría de los ejercicios componen el hilo lógico que sigue el texto por lo tanto es recomendable realizarlos.

Las notas a pie de pagina son referencias colaterales y pueden ser obviadas.

Los Teoremas suelen ser basales o fundamentales, y son proposiciones que, a juicio del autor, requieren un tratamiento cuidadoso. Por lo demás son similares a los ejercicios

Las definiciones son aclaraciones de cómo se usarán ciertos términos.

Este texto tendría que ser leido con un lapiz y papel

1. Espacio, plano, rectas y puntos

1.1. Introdución

Como en el ajedrez, nadie se pregunta sobre el significado de las piezas ni de las casillas ni de los colores, asi aquí no nos ocuparemos de preguntarnos que es espacio, recta, plano, punto sino que los consideraremos como lo más elemental o como concepto primitivo.

Por otro lado nadie discute las reglas del juego del ajedrez. Aqui tampoco lo haremos sino que, en cuenta de llamarlas reglas de juego les llamaremos axiomas.

Los razonamientos que se hacen en ajedrez, por ejemplo "la primera jugada que se hace en ajedrez es el movimiento de un peón blanco o de un caballo blanco", en el caso de la geometría le llamaremos teoremas. [1]

Tambien trataremos con conceptos heredados de teorías anteriores como es el caso de conjuntos, pertenencia, etc.

Por último, para mejor comprensión de los que vamos a exponer haga el ejercicio mental siguiente: olvide, por un momento, lo que sabe de geometría.

1.2. Conjuntos de Puntos

Definición 1. *Diremos que dos conjuntos de puntos son iguales si y solamente si tienen los mismos puntos.* [2]

Definición 2. *Se dice que un conjunto B es subconjunto de un determinado conjunto A si cada punto de B es punto de A. Se simboliza $B \subset A$ y se lee B está incluido en A. Se dice que un conjunto B es subconjunto propio de un determinado*

[1] También es importante, especificar el universo de discusión, las formulas bien formadas y las reglas de inferencia cuando se trata de desarrollar un cuerpo conceptual, pero estos ya son problemas anecdóticos para el alcance lógico que se quiere dar en este texto.

[2] En este curso trataremos principalmente con conjuntos de puntos, pero tambien hablaremos de conjunto de rectas, de planos, etc. Para el caso de las rectas y los planos, en cuenta de conjuntos usaremos la expresión familia.

conjunto A si B está incluido en A y además existe un punto en A que no está en B.[3]

Definición 3. *El conjunto vacío es aquel que no contiene ningún elemento*

Ejercicio 1.2.1. *Si se cumple que $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$. Es decir que si A es un subconjunto de A y A es un subconjunto de B entonces A y B tiene los mismos elementos.*[4]

Axioma 1. *Existe el espacio y es un conjunto de puntos.*

Ejercicio 1.2.2. *Verifique que el espacio pudiera ser el propio vacío*

Axioma 2.

1. *Los planos son subconjuntos propios del espacio.*
2. *Las rectas son subconjuntos propios de los planos.*
3. *Las rectas contienen al menos a dos puntos distintos.*[5]

Ejercicio 1.2.3. *Discuta el siguiente párrafo: "Podemos caracterizar un dragón diciendo que es un ser muy poderoso, que arroja fuego por la boca, que tiene tres garras en cada pata, que es extremadamente sabio, que puede volar, etc. El único problema es que los dragones no existen".*

Axioma 3. *Existe una recta.*

Esta última expresión podría entenderse tambíen como "existe *al menos* una recta". Con esto podemos asegurar que

Teorema 4. *Existe un plano con (al menos) tres puntos. El espacio contiene cuatro puntos.*

[3] La expresión subconjunto propio se aclara con un ejemplo: El conjunto formado por todos los hombres es un subconjunto propio del conjunto de humanos, pues hay humanos que no son hombres, por ejemplo las mujeres.

[4] De ahora en más, cuando se enuncie una proposición en un ejercicio o en un teorema debe tratar de demostrarse. Por lo cual nos ahorraremos las palabras *demostrar que...*

[5] De ahora en más, cuando digamos dos puntos, entenderemos que se trata de dos puntos *distintos*. Del mismo modo que cuando hablemos de tres, cuatro o cualquier cantidad de puntos a menos que se indique lo contrario.

Esto es cierto pues al existir una recta, y al ser esta un subconjunto de un plano, debe existir un plano. Llamemos a esta recta r y al plano π. Como por axioma esta recta contiene dos puntos P y Q, debe existir en π un punto R que no está en r, pues sinó r no sería un subconjunto propio de π, contra el axioma. Con estas afirmaciones se prueba que π contiene tres puntos. La segunda oración se deja como...

Ejercicio 1.2.4. *El espacio contiene cuatro puntos.*■

A esta altura de nuestro juego podría darse que haya planos sin puntos, es decir un plano podría ser un conjunto vacío. Solucionemos esto

Axioma 4. *Los planos contienen una recta y un punto fuera de esta.*

Ejercicio 1.2.5. *Todos los planos contienen al menos tres puntos.*

Note que hasta ahora no podemos contar a ciencia cierta con más de una recta y un plano.

Axioma 5. *Dados dos puntos existe una única recta que contiene a ambos puntos. Dados tres puntos que no están en una misma recta existe un único plano que los contiene.*

Definición 5. *A los puntos que están sobre una recta se les llama colineales. Los puntos que están sobre un plano se llaman coplanares. Estos conceptos se extienden naturalmente para el caso de conjuntos de puntos, como por ejemplo a las rectas.*

Definición 6. *Dos rectas coplanares se les llama paralelas si son iguales o si su intersección*[6] *es vacía. Dos rectas distintas se dicen secantes si su intersección es no vacía. A dos rectas no coplanares se les llama alabeadas. Una familia de rectas se le llama concurrente si tienen un punto en común*

Ejercicio 1.2.6. *Dos rectas secantes tienen solamente un punto en común.*

[6] Si tengo dos conjuntos A y B, la intersección de A y B es el conjunto de los puntos que están a la vez en A y B. La unión de A y B es el conjunto de los elementos que están ya sea en A o ya sea en B.

Ejercicio 1.2.7. *El conjunto vacío, un punto y dos puntos cualesquiera son colineales. Tres puntos, distintos o no, son coplanares.*

Ejercicio 1.2.8. *Existen cuatro puntos que no son coplanares. Existen tres puntos que no son colineales.*

Ejercicio 1.2.9. *Los planos contienen tres rectas. El espacio contiene cuatro planos y seis rectas.*

Por otro lado, ¿Cuántos puntos en común pueden tener una recta con un plano?

Axioma 6. *Si una recta con un plano tienen dos puntos en común, entonces el plano incluye toda la recta.*

Ejercicio 1.2.10. *Dos rectas secantes determinan un único plano que las contiene.*

Teorema 7. *Existen dos rectas que no son coplanares*[7]

Sea el plano π, la recta r en π y el punto P en el plano π y no en la recta r y dos puntos A y B en r. Sea el punto Q que no está en π. (Verifique como ejercicio que estos objetos existen). Sea $s = \overleftrightarrow{PQ}$ [8]. Es claro que s no está en π pues Q no está en π. Si r y s estuvieran en un mismo plano, este plano debería ser π, pues A, B y P determinan a π. Pero s no está en π. Por lo tanto r y s no son coplanares.■

Ejercicio 1.2.11. *Dada una recta r, existe otra recta s que es no coplanar con r.*

Ejercicio 1.2.12. *Dos rectas distintas tienen a los sumo un punto en común*

Ejercicio 1.2.13. *Sean a y b dos rectas paralelas y t una recta que es secante con a y con b, entonces t está en el mismo plano que a y b.*

Ejercicio 1.2.14. *La intersección entre una recta y un plano puede ser solamente el conjunto vacío, la propia recta o un conjunto unitario*[9]

[7] A estas rectas suele decirseles alabeadas.

[8] Esto es la recta *determinada* por los puntos P y Q.

[9] Un conjunto formado por un solo elemento. En este caso por un solo punto.

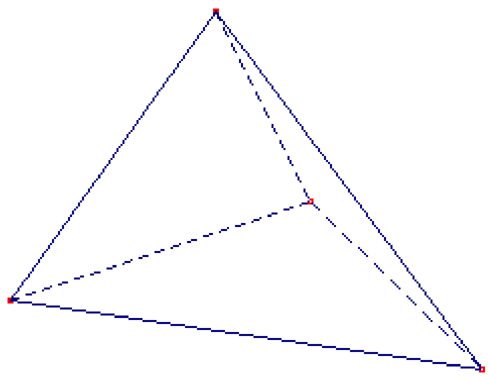
La intersección entre dos planos, ¿De cuántos puntos puede constar?

Axioma 7. *La intersección entre dos planos no puede ser un conjunto unitario*[10]

Ejercicio 1.2.15. *La intersección entre dos planos distintos puede ser el conjunto vacío o una recta.*

1.2.1.Modelos

Para este entonces, el espacio que hemos construido se parece a los vértices de un tetraedro[11], donde los trios de puntos representarían lo que hemos llamado planos, las aristas corresponderían a los pares de puntos. Es tambien parecido al espacio geométrico intuitivo. Estas representaciones se les llama modelos.



Ejercicio 1.2.16. *Reflexione sobre los modelos que pudieran haberse presentado a medida que haciamos la enunciación de los axiomas.*

1.2.2.Semirrectas y semiplanos

Axioma 8. *Los puntos de cualquier recta admiten dos órdenes totales opuestos*[12]*. Una vez elegido uno de estos, afirmamos que no puede haber un primer punto,*

[10] Raro como parezca el axioma 7 no puede deducirse de los axiomas anteriores.

[11] Un tetraedro es un cuerpo que tiene seis caras y cada una de ellas es un triángulo.

[12] Orden entre puntos significa que dados dos puntos cualesquiera A y B que son comparables, puedo indicar cual es anterior al otro. Además si A es anterior a B, no puede ser que B sea anterior a A y por otro lado tambien un trio de puntos A, B y C si se cumple que A es anterior a B y B es anterior a C entonces se debe cumplir que A es anterior a C. Con el adjetivo total se quiere decir que se pueden comparar cualquier par de puntos. El adjetivo opuesto se usa para decir que se pueden permutar los términos anterior por posterior.

es decir uno que sea anterior a todos, ni un último punto, es decir uno que sea posterior a todos[13]*. Además dados dos puntos habrá un tercero que será anterior a uno y posterior al otro*[14]*.*

Teorema 8. *Los puntos de una recta son infinitos*

Esto es claro del hecho de estar ordenados. Si fueran una cantidad finita se podría decir, por conteo directo, cual es el primero y cuál es el último, contradiciendo el axioma.■

Ejercicio 1.2.17. *Entre dos puntos cualesquiera de una recta hay infinitos puntos.*

Ejercicio 1.2.18. *Las rectas, los planos y el espacio son conjuntos infinitos.*

Definición 9. *Dada una recta r y un punto O sobre la recta r. Al conjunto de puntos anteriores a O se le llama semirecta abierta de origen O. Igual calificativo se le dá al conjunto de los puntos posteriores a O. Si P es un punto de la recta r anterior a O, El conjunto de los puntos anteriores a O se los simboliza con $\overrightarrow{OP}$ y se los nombra como la "semirecta abierta OP". Cuando se usa la palabra semirrecta (sin usar la palabra abierta) entenderemos que se trata de una semirecta que incluye el punto del origen. Usaremos la misma notación para semirectas que para semirectas abiertas, siempre y cuando en el contexto quede clara la diferencia, o sea irrelevante. En el caso de querer hacer una diferencia usaremos $\overset{\circ\!\!\to}{AB}$ para indicar que tratamos con la semirecta abierta de origen A.*

Definición 10. *Se llama haz de semirrectas de origen el punto O a todas las semirectas de origen O.*

Ejercicio 1.2.19. *Tomemos las semirectas de un haz de origen O. que están sobre un plano π, que contiene al punto O. De estas semirrectas de origen O quitemos una semirrecta cualquiera. Para las semirrectas restantes definir un orden inducido por la rotación de las agujas de un reloj a este orden le llamemos negativo y al contrario positivo. Encontrar una analogía con los órdenes de las puntos sobre la recta.*[15]

[13] A este tipo de conjuntos se le llama abiertos

[14] A este tipo de conjuntos se le llama densos

[15] Puede pensarse en un orden común para todos los haces de semirrectas del plano pero, para los fines de este texto, alcanza con el significado intuitivo de orden.

Definición 11. *Dos semirectas se les dice opuestas si contienen el mismo origen y son colineales, pero son distintas A la semirecta opuesta a la* $\overrightarrow{OP}$ *le llamaremos* $\sim \overrightarrow{OP}$

Definición 12. *Dados dos puntos* P *y* Q. *Los puntos que están entre* P *y* Q[16] *forman el segmento abierto* $\overline{PQ}$. *A los puntos* P *y* Q *se les llama extremos de dicho segmento.*

Definición 13. *El segmento* $\overline{PQ}$ *es el segmento abierto* $\overline{PQ}$ *unido al conjunto* $\{P, Q\}$

Note que el conjunto vacío es un segmento abierto y que el conjunto unitario es un segmento.

Ejercicio 1.2.20. *El segmento abierto* $\overline{PQ}$ *es la intersección de las semirectas abiertas* $\overrightarrow{PQ}$ *y* $\overrightarrow{QP}$.

Ejercicio 1.2.21. *Las semirectas abiertas y los segmentos abiertos son conjuntos densos y abiertos.*

Definición 14. *Una propiedad de un conjunto es hereditaria si todos los subconjuntos de este conjunto tienen la misma propiedad.*

Ejercicio 1.2.22. *Discuta si las propiedades de ser coplanar, colineal, infinito, denso y abierto son hereditarias.*

Ejercicio 1.2.23. *Considere dos puntos* A *y* B. *Considere el lugar geométrico de los puntos* X *tal que* B *pertenece al segmento abierto* $\overline{AX}$. *¿Corresponde a alguna semirrecta abierta?*

Definición 15. *Un conjunto se llama convexo si cualquier par de puntos del conjunto son extremos de un segmento incluido en el conjunto.*

Ejercicio 1.2.24. *El espacio, los planos, las rectas, las semirectas, los segmentos, el vacío y los conjuntos unitarios de puntos son conjuntos convexos. Los conjuntos formados por dos puntos solamente, no son convexos.*

[16] Los puntos que están entre P y Q son los puntos que son posteriores a P y anteriores a Q, en el caso de que Q sea posterior a P. En el caso que P sea posterior a Q, los puntos entre P y Q seran los posteriores a Q y anteriores a P.

Ejercicio 1.2.25. *La intersección de dos conjuntos convexos es convexa.*

Ejercicio 1.2.26. *Dar ejemplo de una unión de conjuntos convexos que no sea convexa.*

Ejercicio 1.2.27. *Decidir y justificar si la convexidad es una propiedad hereditaria.*

Axioma 9. *Dado un plano π y una recta r en el plano π. Los puntos del plano π que no pertenecen a la recta r, forman dos conjuntos disjuntos, no vacíos, convexos de tal modo que si tomo un punto P en uno de estos y otro punto Q en el otro, la intersección entre $\overline{PQ}$ y r es no vacía.*

Definición 16. *A los conjuntos definidos en el axioma 9 se les llama semiplanos abiertos, a la recta r se le llama borde del semiplano. Los semiplanos estan compuestos por el semiplano abierto correspondiente más su borde. A los puntos de un semiplano de borde una recta r se dice con cierto abuso permitido del lenguaje que están de un lado de la recta r.*

Ejercicio 1.2.28. *Sea un plano π y una recta r en el plano π. Los segmentos de π que no tienen un extremo en r, o bien están incluidos en un semiplano abierto determinado por r, o bien cortan a la recta r.*

Teorema 17. *Sea un plano π y una recta r en π. Sea α uno de los semiplanos abiertos de π definidos por r. Sea P un punto de α y O un punto de r. Sea $a = \overrightarrow{OP}$ abierta. En estas condiciones a esta completamente incluida en α.*

Si este no fuera el caso existiría un punto X que estaría en a y que no estaría en α. X en este caso estaría en el semiplano de π que no contiene a P, pues la recta que contiene a a tiene dos puntos en π, O y P. (Ver axioma 6) En este caso, por axioma 9, la recta r con el segmento $\overline{XP}$ tienen que tener intersección no vacía, es decir $\{O\}$, pues la recta que contiene a a y r solo pueden tener un punto en común. (Ver ejercicio 1.2.12) En resumen, el punto O estaría entre P y X, lo que es absurdo ya que X es un punto de a.■

Ejercicio 1.2.29. *Si una semirecta a, con origen en un punto de la recta r, tiene un punto en un semiplano determinado por r, la semirecta opuesta a a tendrá todos sus puntos en el otro semiplano.*

1.2.3. Ángulos y triángulos

Definición 18. *Dadas dos semirectas a y b de origen O, se llama ángulo a la intersección de los semiplanos determinados por las rectas que contienen a las semirectas de tal manera que cada uno de los semiplanos contenga a la otra semirecta. A las semirectas a y b se les llama lados del ángulo y al punto O se le llama vértice del ángulo.*

Definición 19. *Si las semirectas coinciden el ángulo determinado se le llama nulo. Si las semirectas son opuestas se le llama ángulo llano.*

Definición 20. *El interior de un ángulo es el conjunto formado por el ángulo menos los lados*[17].

Ejercicio 1.2.30. *El interior de un ángulo es la intersección de dos semiplanos abiertos.*

Ejercicio 1.2.31. *El ángulo nulo tiene interior vacío. El ángulo llano tiene por interior un semiplano abierto.*

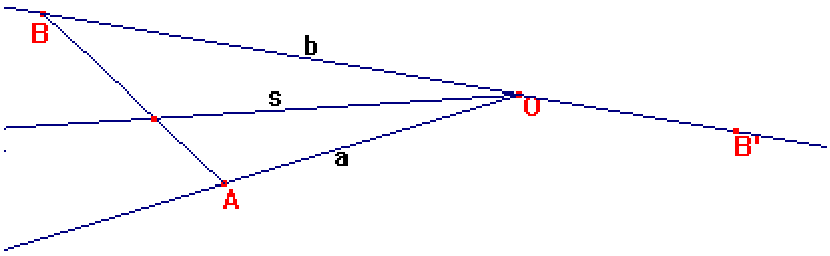
Definición 21. *Una semirecta interior es aquella que tiene origen en el vértice del ángulo y tiene un punto en el interior del ángulo. Se dice que un segmento apoya sus extremos en los lados de un ángulo si cada extremo es un punto de cada uno de los lados del ángulo.*

Ejercicio 1.2.32. *Toda semirecta interior y todo segmento apoyado en los lados de un ángulo están incluidos en un ángulo.*

Ejercicio 1.2.33. *El interior de un ángulo no nulo es no vacío.*

[17] El conjunto A menos el conjunto B es el conjunto de todos los elementos de A que no están en B.

Teorema 22. *Toda semirecta interior de un ángulo corta a todo segmento apoyado en el ángulo.*



Una semirecta interior corta a cualquier segmento apoyado en el ángulo

Sean dos semirectas a y b de origen O, una semirecta interior s y un segmento $\overline{AB}$, como lo indica la figura. Sobre la semirecta abierta opuesta a b escojamos un punto B'. El segmento $\overline{AB'}$ no corta a s ni a su opuesta pues por el ejercicio 1.2.32 $\overline{AB'}$ está completamente contenido en el ángulo de lados a y la semirecta opuesta a la b, mientras que la semirrecta s está en el ángulo formado por a y por b y la opuesta de s está completamente incluida en $\sim a$ y $\sim b$ (ver ejercicio 1.2.29). Por esto A y B están en semiplanos opuestos con respecto a la recta que incluye a s, y entonces $\overline{AB}$ la corta. Además como la semirecta s y el segmento $\overline{AB}$ están en el ángulo, se cortan en el interior del ángulo.$\blacksquare$

Definición 23. *Dados tres puntos A, B y C no alineados, la intersección de los semiplanos determinados por cada par de estos puntos y que contienen al tercero se llama triángulo. El interior de un triángulo es, naturalmente, la intersección de los semiplanos abiertos correspondientes. Los segmentos entre los puntos se les llama lados del triángulo y a los puntos mencionados se les llama vértices del triángulo.*

Definición 24. *El vertice A, que no pertenece a un lado $a = \overline{BC}$ en un triángulo ABC, se llama vertice opuesto al lado a. Al lado a se le llama opuesto al vértice A.*

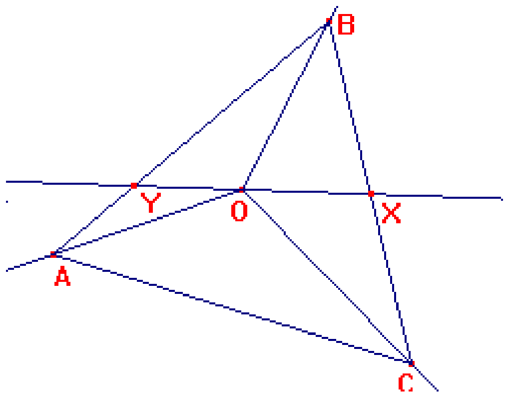
Ejercicio 1.2.34. *El interior de un triángulo no degenerado es no vacío*

Ejercicio 1.2.35. *Los segmentos entre los puntos de un lado y el vértice opuesto de un triángulo están incluidos en el triángulo*[18]

[18] A estos segmentos se les llama cevianas

Ejercicio 1.2.36. *Dos semirectas interiores de ángulos distintos de un triángulo no degenerado, se cortan en el interior del triángulo*

Ejercicio 1.2.37. *Sea un triángulo ABC*[19]*. Sea O un punto en el interior del triángulo. Los ángulos determinados por las semirectas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$, tomadas de a pares, cubren todo el plano donde se encuentra el triángulo.*



Ejercicio 1.2.38. *Cualquier semirecta que sea coplanar con un triángulo, con origen en un punto interior del triángulo corta un lado del triángulo.*

Ejercicio 1.2.39. *Toda recta coplanar con un triángulo, que tiene puntos en el interior de un triángulo, corta los lados de un triángulo dos veces. Además, si una recta coplanar con el triángulo corta una vez al triángulo, lo hará dos veces*

1.2.4. El semiespacio

Dado el plano π y sea el espacio Ω.

Definición 25. *Sea un punto P que no pertenece a π, se llama subespacio S_P al conjunto formado por los puntos que son los segundos extremos de los segmentos que tienen uno de sus extremos en P y que no tienen ningún punto de π.*

Ejercicio 1.2.40. *S_P es no vacío*

Teorema 26. *S_P es convexo.*

[19] Esta notación significa que los vértices de un triángulo son los puntos A, B y C.

Sean los puntos Q y R (cualesquiera) pertenecientes a S_P. Si los puntos P, Q y R estuvieran alineados, el segmento $\overline{QR}$, pertenecería a S_P. (La justificación se la dejamos al lector). En el caso en que los puntos P, Q y R no estuvieran alineados el segmento $\overline{QR}$ deberá pertenecer a S_P. Si este no fuera el caso, consideremos al triángulo $PQR = t$ y el plano α determinado por P, Q y R. Si la intersección entre α y π fuera vacía, los segmentos entre los puntos de $\overline{QR}$ y P no tendrían puntos en común con π, y el segmento en cuestión estará en $S_{P.}$ Si la intersección entre α y π fuese la recta r, esta recta no puede cortar ningun lado de t ni pasar por un vértice. En efecto, si la recta cortara algún lado de t, esta lado debería ser necesariamente $\overline{QR}$, puesto que los otros lados, por hipótesis, no contienen ningún punto de π. En este caso se contradice la segunda parte del ejercicio 1.2.39. Tampoco pueden haber puntos de r en el interior de t. (La justificación se la dejamos al lector) En definitiva, ninguna ceviana desde el punto P, tiene puntos de la recta r y por lo tanto, en este caso tambien el segmento $\overline{QR}$ está incluido en S_P. Como hasta aquí hemos considerado todos los casos posibles, concluimos que S_P es conexo.■

Definición 27. *Los puntos que no están en π y que tampoco están en S_P forman un conjunto al que se le llama semiespacio opuesto a $S_{P.}$ Lo denotaremos $\sim S_P$*

Ejercicio 1.2.41. *$\sim S_P$ es no vacío*

Ejercicio 1.2.42. *Los segmentos entre los puntos de $\sim S_P$ y P contienen un punto de π*

Ejercicio 1.2.43. *Los segmentos entre los puntos de $\sim S_P$ y los puntos de S_P contienen un punto de π.*

Ejercicio 1.2.44. *$\sim S_P$ es convexo.*

Ejercicio 1.2.45. *Cualquier punto de S_P sirve para definir a S_P. Esto es, si $Q \in S_P$, el conjunto de los segundos extremos de los segmentos que tienen por extremo al punto Q y que no contienen ningun punto de π, es el propio $S_{P.}$ Sugerencia: considere los triángulos QPX para un X cualquiera de S_P.*

Ejercicio 1.2.46. *Sea $Q \in \sim S_P$, el conjunto de los segundos extremos de los segmentos que tienen por extremo al punto Q y que no contienen ningun punto de π, es el propio $\sim S_{P.}$*

Ejercicio 1.2.47. *Un semiplano de borde alguna recta de π y que contiene a P está completamente contenido en S_P*

2. Transformaciones en el plano

2.1. Funciones de puntos

En esta sección intentaremos justificar la noción intuitiva de movimiento de la forma más formál y rápida que podamos. Para esto deberemos hablar de algunos conceptos de matemática previos. Primeramente nos ocuparemos de funciones de puntos.

Definición 28. *Dados dos puntos P y Q, se llama par ordenado de los puntos P y Q al conjunto de la forma $\{\{P\},\{P,Q\}\}$. Se lo denota (P,Q). al punto P se le llama primera componente y al punto Q se le llama segunda componente.*[1].

Definición 29. *Dados dos conjuntos de puntos α y β, al conjunto de todos los pares ordenados de tal manera que la primera componente es un punto de α y segunda componente es un punto de β, se le llama producto cartesiano de α y β y se lo denota por $\alpha \times \beta$. A todo subconjunto de $\alpha \times \beta$ se le llama relación de α en β.*

Definición 30. *A una relación de α en β que cumple que para cada punto P de α existe un único punto Q de β de tal modo que el par (P,Q) está en esta relación, se le llama función de α en β. En este caso se dice que la función f asigna a P el valor Q y se escribe $f(P)=Q$. Al conjunto α se le llama dominio de la función y al conjunto β se le llama codominio de la función. Al conjunto de las segundas componentes de la función se le llama imagen de la función. Se dice que P es un punto fijo de f si se cumple que $f(P)=P$.*

Es claro que la imagen de la función es un subconjunto del codominio de la función. Muchos autores le llaman a la asignación función, mientras que al conjunto de pares ordenados le llaman gráfica de la función.

[1] En realidad en cuenta de puntos podremos hablar de elementos en general, pero como la mayor parte de las veces trataremos solamente con puntos, nos referiremos a puntos.

Ejercicio 2.1.1. *La relación de α en α, que consta de todos los pares ordenados con primera y segunda componentes iguales se llama función identidad. Muestre que es efectivamente una función.*

Ejercicio 2.1.2. *De un ejemplo de una relación de ω en ω que no sea función.*

Ejercicio 2.1.3. *Sean α y β dos conjuntos de puntos (cualesquiera) y sea f una función, Si . $\alpha \subset \beta = f(\alpha) \subset f(\beta)$* [2]

2.1.1. Funciones biyectivas

Definición 31. *Una función es biyectiva si la imagen coincide con el codominio y si cualquier par de puntos distintos del dominio tienen imagenes distintas.*

Ejercicio 2.1.4. *La función identidad es biyectiva*

Definición 32. *La inversa de una función f es una relación que se obtiene de intercambiar la primera por la segunda componente de los pares ordenados de la función. Se la denota por f^{-1}*

Definición 33. *Dadas dos funciones f y g, de tal modo que la imagen de g es un subconjunto del codominio de f, se define una función h que se le llama composición de g con f y se denota $f \circ g$ a la función que tiene como dominio α el dominio de g y como codominio β el codominio de f de tal modo que para cada $P \in \alpha$ existe un $Q \in \beta$, tal que $f(g(P)) = Q$.*

Teorema 34. *Si una función f es biyectiva, su inversa es una función.*

Para cada elemento Q del codominio de f, existirá al menos un P del dominio de f de tal modo que $Q = f(P)$, pues, como f es biyectiva el dominio de f coincide con la imagen. Además este P debe ser único, pues si hubiese dos, por ejemplo P y P' de tal modo que $Q = f(P)$ y $Q = f(P')$ se estaría contradiciendo la definición de biyectividad.

Ejercicio 2.1.5. *Si la inversa de una función es función, es tambien biyectiva.*

Ejercicio 2.1.6. *Sean f y g funciones biyectivas entonces $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$*

Ejercicio 2.1.7. *La composición de una función biyectiva con su inversa es la identidad.*

[2] Se dice que las funciones preservan la inclusión

2.1.2. Conjuntos estables

Definición 35. *Sea α un conjunto de puntos definimos $f(\alpha)$ al conjunto de los puntos $Q = f(P)$ donde P es un punto de α. Se dice que α es estable en f si cumple que $f(\alpha) = \alpha$*

Teorema 36. *Sean α y β dos conjuntos de puntos (cualesquiera) y sea f una función biyectiva. $f(\alpha \cup \beta) = f(\alpha) \cup f(\beta)$.*[3]

En efecto si tomamos P en $\alpha \cup \beta$, P deberá estar en α o en β, y $Q = f(P)$ deberá estar en $f(\alpha)$ o en $f(\beta)$, luego Q estará en $f(\alpha) \cup f(\beta)$. Por otro lado, si $Q = f(P)$ está en $f(\alpha) \cup f(\beta)$, Q deberá estar en $f(\alpha)$ o en $f(\beta)$. Si Q estuviera en $f(\alpha)$, al ser f biyectiva P debería estar en α. Del mismo modo si Q estuviera en $f(\beta)$. De estas dos últimas oraciones deducimos que P no puede estar en otro lugar más que en $\alpha \cup \beta$. ■

Ejercicio 2.1.8. *Sean α y β dos conjuntos de puntos (cualesquiera) y sea f una función biyectiva. $f(\alpha \cap \beta) = f(\alpha) \cap f(\beta)$*[4]

Ejercicio 2.1.9. *La composición de funciones biyectivas es biyectivas.*

Ejercicio 2.1.10. *Un punto fijo de una función biyectiva es también punto fijo de la función inversa.*

2.2. Transformaciones rígidas en el plano

Nos restringiremos a las transformaciones en el plano π.

Axioma 10. *Una transformación η en el plano π es una función biyectiva de π en π. Un transformación será rígida si*

1. *Dados tres puntos cualesquiera A, B y C, que cumplen que están alineados con B entre A y C, entonces $\eta(A), \eta(B)$ y $\eta(C)$ están alineados con $\eta(B)$ entre $\eta(A)$ y $\eta(C)$*[5]

2. *ningún segmento puede transformarse en una parte propia de si mismo*

[3] Se dice que las funciones biyectivas preservan la unión.
[4] Se dice que las funciones biyectivas preservan la intersección
[5] Preserva la alineación y la relación entre.

3. *ningún ángulo puede transformarse en otro ángulo con el mísmo vértice pero que sea parte propia de si mismo.*

4. *Las transformaciones rígidas deben cumplir que*

    1. *La inversa de una transformación rígida en una transformación rígida (t.r)*
    2. *La composición de transformaciones rígidas es rígida*
    3. *Dados una semirecta s y un semiplano α determinado por esta semirecta; y otra semirecta s' y un semiplano α' determinados por esta última existe una única transformación rígida tal que $\eta(s) = s'$ y $\eta(a) = \alpha'$*

Ejercicio 2.2.1. *La función identidad es una tranformación rígida*

Teorema 37. *Las semirectas se transforman en semirrectas. en una t.r.*

Sea la semirecta s de origen O. Sea η una t.r. de tal modo que $O' = \eta(O)$, sea $s' = \overrightarrow{\eta(O)\eta(P)}$ donde P es un punto de la semirecta s distinto de O. Probaremos que $\overrightarrow{\eta(O)\eta(P)} = \eta\left(\overrightarrow{OP}\right) = s'$. Si tomamos un punto $Q \in \overline{OP}$, es decir que Q estaría entre O y P, quedaría claro que $\eta(Q)$ estaría entre $\eta(O)$ y $\eta(P)$ por definición de t.r., luego $\eta(Q) \in \overrightarrow{\eta(O)\eta(P)}$. Lo mismo sucedería si $P \in \overline{OQ}$. Por otro lado tomemos un $Q' \in \overrightarrow{\eta(O)\eta(P)}$ y consideremos el caso en que Q' esté entre $\eta(O)$ y $\eta(P)$ en este caso por axioma de t.r. la inversa de toda transformación rìgida es una transformación rìgida queda que $\eta^{-1}(Q')$ está entre $\eta^{-1}(\eta(O)) = O$ y $\eta^{-1}(\eta(P)) = P$. El caso que resta considerar lo dejamos como ejercicio para el lector.$\blacksquare$

Ejercicio 2.2.2. *Las rectas se transforman en rectas en una t.r.*

Ejercicio 2.2.3. *Los segmentos se transforman en segmentos en una t.r.*

Ejercicio 2.2.4. *Los semiplanos se transforman en semiplanos*

Ejercicio 2.2.5. *Un segmento no puede contener como parte propia a su transformado*

Ejercicio 2.2.6. *La opuesta de una semirecta se transforma en una t.r. en la opuesta de la semirecta transformada*

Ejercicio 2.2.7. *El semiplano opuesto de un semiplano se transforma en una t.r. en el opuesto del semiplano transformado*

Ejercicio 2.2.8. *Las rectas paralelas se transforman en paralelas*

Ejercicio 2.2.9. *Tres puntos no alineados se transforman en puntos no alineados*

Ejercicio 2.2.10. *Las rectas secantes se transforman en rectas secantes.*

Teorema 38. *Dado un segmento $\overline{PQ}$ y una semirecta s de origen O, existe un único punto R en s que cumple que $\overline{OR}$ es congruente con $\overline{PQ}$.*

Sea la semirecta $\overrightarrow{PQ}$ y α un semiplano de borde esta semirecta[6]. Por el axioma de las t.r. existirá una única t.r. η tal que $\eta\left(\overrightarrow{PQ}\right) = s$ y $\eta(\alpha) = \alpha'$, donde α' es uno de los semiplanos de borde s. En estas condiciones $\eta(Q) = R$ y entonces $\overline{PQ} \equiv \overline{OR}$. Si existiese un $R' \neq R$ tambien sobre s y que cumpla que $\overline{PQ} \equiv \overline{OR'}$ quiere decir que existe ζ, t.r. tal que $\zeta\left(\overline{PQ}\right) = \overline{OR'}$ pero por axioma existe tambien $\eta \circ \zeta$ t.r. tal que $\eta \circ \zeta\left(\overline{OR'}\right) = \overline{OR}$ pero esto contradiría el axioma de las t.r. o alguna de sus consecuencias (Ver ejercicio 2.2.5) ya que uno de los segmentos sería parte propia del otro. Luego $R = R'$■

El teorema 38 se le llama teorema de transporte de segmentos, y el nombre se debe a que esto justifica que se pueda hacer copias de un segmento sobre cualquier semirrectas. En el plano más concreto esto justificaría que se puede calcar un segmento dado en otra semirecta dada. Siguiendo el razonamiento para transporte de segmentos se puede deducir el teorema para transporte de ángulos que se deja como

Ejercicio 2.2.11. *Enunciar y demostrar el teorema de transporte de ángulos.*

Ejercicio 2.2.12. *Si una t.r. tiene dos puntos fijos tiene toda una recta fija*

Ejercicio 2.2.13. *Si una t.r. tiene tres puntos fijos no alineados, esta t.r. es unicamente la identidad.*

[6] En realidad deberíamos decir un semiplano de borde la recta que contiene a esta semirecta. Pero el ahorro de palabras justifica el abuso de lenguaje cometido.

2.2.1. Congruencia

Definición 39. *Dos conjuntos de puntos se dicen congruentes si existe una transformación rígida de tal modo que la imagen por esta de uno de ellos es el otro. Para la congruencia usaremos el símbolo* $\equiv$

Ejercicio 2.2.14. *Todo conjunto es congruente consigo mismo*[7]

Ejercicio 2.2.15. *Si un conjunto* α *es congruente con un conjunto* β *el conjunto* β *lo es con el* α.[8]

Ejercicio 2.2.16. *Si un conjunto* α *es congruente con un conjunto* β *y el conjunto* β *lo es con el* γ, α *es congruente con el* γ.[9]

Definición 40. *El lugar geométrico de los puntos que son los segundos extremos de los segmentos no nulos y congruentes que tienen un extremo en* O, *se le llama circunferencia de centro* O. *A cada uno de los segmentos se le llama radio de la circunferencia.*

Ejercicio 2.2.17. *Las circunferencias se transforman en circunferencias en una t.r. Además si el centro de una circunferencia es fijo en una t.r. entonces la circunferencia es estable.*

Definición 41. *Un triangulo es isosceles si tiene un par de lados congruentes. Si los tres lados de un triángulo son congruentes el triángulo es equilátero.*

Orden en segmentos y ángulos

Definición 42. *Un segmento* $\overline{AB}$ *es menor que uno* $\overline{CD}$ *si existe un segmento* $\overline{A'B'}$ *incluido propiamente en* $\overline{CD}$ *y que es congruente con* $\overline{AB}$. *Un ángulo* α *es menor que un ángulo* β *si existe un ángulo* α' *incluido propiamente en* β *y con el mísmo vértice*

Ejercicio 2.2.18. *Un segmento* $\overline{AB}$ *es menor que uno* $\overline{CD}$ *si existe un punto* B' *en* $\overline{CD}$ *de tal modo que* $\overline{CB'} \equiv \overline{AB}$.

[7] Se le llama propiedad reflexiva de la congruencia.

[8] Se le llama propiedad simétrica de la congruencia.

[9] Se le llama propiedad transitiva de la congruencia. Como la congruencia cumple la reflexividad, la reciprocidad y la transitividad, se dice que la congruencia es una relación de equivalencia.

Ejercicio 2.2.19. *Un ángulo $\widehat{ab}$ es menor que un ángulo $\widehat{cd}$ si existe una semirecta interior b' en $\widehat{cd}$ de tal modo que $\widehat{cb'} \equiv \widehat{ab}$.*

Ejercicio 2.2.20. *Ningún segmento puede transformarse en uno menor.*

Ejercicio 2.2.21. *Ningún ángulo puede transfomarse en uno menor.*

Punto medio y bisectriz

Definición 43. *Se dice que dos puntos A y B equidistan de un tercero O si $\overline{AO} \equiv \overline{BO}$. El el caso en que A, B y O estubieran alineados, a O se le llamaría punto medio del segmento $\overline{AB}$.*

Ejercicio 2.2.22. *El punto medio M de un segmento $\overline{AB}$ se encuentra entre A y B.*

Ejercicio 2.2.23. *El punto medio de un segmento, si existe, es único.*

Definición 44. *Sea s una semirecta interior del ángulo $\widehat{ab}$ que cumple que $\widehat{as} \equiv \widehat{sb}$, entonces a s se le llama bisectriz del ángulo $\widehat{ab}$*

Ejercicio 2.2.24. *La bisectriz de un ángulo, si existe, es única.*

Angulos Adyacentes

Definición 45. *Dos ángulos se les llama adyacentes si comparten un lado y los otros dos lados están sobre semirrectas opuestas.*

Ejercicio 2.2.25. *Todo ángulo no nulo ni llano tiene dos adyacentes*

Definición 46. *Un ángulo se dice recto si es congruente con alguno de sus adyacentes.*

Ejercicio 2.2.26. *Todos los ángulos rectos son congruentes*

Definición 47. *Un ángulo α que es congruente con un adyacente de otro β se dice suplementario*

Ejercicio 2.2.27. *Todos los ángulos rectos son suplementarios*

Suma de segmentos y ángulos

Definición 48. *Un segmento* $\overline{AB}$ *se le llama suma de otros* $\overline{CD}$ *y* $\overline{EF}$ *si existe un punto* X *de tal modo que* $\overline{AX} \equiv \overline{CD}$ *y* $\overline{XB} \equiv \overline{EF}$. *A la suma de dos segmentos congruentes se le llama segmento doble. El resto de las definiciones se vuelven naturales*

Ejercicio 2.2.28. *Definir segmento mitad*

Ejercicio 2.2.29. *Definir suma de ángulos.*

Ejercicio 2.2.30. *Definir ángulo doble y ángulo mitad.*

Ejercicio 2.2.31. *La suma de dos rectos es un llano*

Definición 49. *Si la suma de dos ángulos es un recto, a aquellos ángulos se les llama complementarios. Si la suma de dos ángulos es un llano a los ángulos se les llama suplementarios.*

Ejercicio 2.2.32. *Dos ángulos adyacentes son suplementarios. ¿Es cierto la proposición recíproca?*

2.2.2. Transformaciones rígidas involutivas

Definición 50. *Una t.r. se dice involutiva si al componerla con si misma resulta la función identidad.*

Ejercicio 2.2.33. *Mostrar que la inversa de una t.r. involutiva es la propia t.r.*[10]

Teorema 51. *Una t.r. involutiva deja estable un segmento de extremos un punto cualquiera y su transformado.*

Esto es claro pues para cualquier P, se cumple que $\overline{P\eta(P)} = \overline{\eta(\eta(P))\,\eta(P)} = \eta\left(\overline{\eta(P)\,P}\right) = \eta\left(\overline{P\eta(P)}\right)$ por ser η involutiva. ■

Ejercicio 2.2.34. *Una t.r. involutiva deja estable una recta que pasa por un punto cualquiera y su transformado (Considere el caso que el punto por donde pasa sea fijo)*

[10] A este tipo de funciones se les llama autoinversas

Ejercicio 2.2.35. *En una t.r. involutiva si una recta y su transformada se intersecan en un punto, este punto es fijo en esta t.r.*

Teorema 52. *El punto medio (si existe) de un segmento de extremos un punto y su transformado en una t.r. involutiva es fijo.*

Sea M el punto medio del $\overline{AB}$ y sea η una t.r. involutiva con $B = \eta(A)$, entonces $\eta\left(\overline{AM}\right) = \overline{BM'}$. Como $\zeta\left(\overline{BM}\right) = \overline{AM}$, para alguna t.r. ya que $\overline{AM} \equiv \overline{BM}$, entonces $M = M'$. Si este no fuera el caso, haciendo $\eta\left(\zeta\left(\overline{BM}\right)\right) = \overline{BM'}$ se llegaría a que uno de los dos segmentos $\overline{BM}$ o $\overline{BM'}$, seria menor que el otro contradiciendo alguna consecuencia del axioma de las t.r.$\blacksquare$

Ejercicio 2.2.36. *La bisectriz (si existe) de un ángulo determinado por una semirecta y su transformada es estable en una t.r. involutiva con todos sus puntos fijos.*

Ejercicio 2.2.37. *Toda t.r. involutiva tiene al menos un segmento estable. Naturalmente también una recta estable.*

3. Tipos de Transformaciones

3.1.Simetría central

Definición 53. *Sea O un punto del plano π. sea s una semirecta cualquiera de origen O. y α un semiplano de borde s. La t.r. σ_O es la simetría central de centro O si $\sigma_O(s) =\sim s$ y $\sigma_O(\alpha) =\sim \alpha$*

Teorema 54. *Cualquier semirecta de origen O serviría igualmente para definir la misma simetría σ_o*

Sean dos semirectas no opuestas s y t. Sean los semiplanos α y β dos semiplamos de bordes respectivamente s y t. Si $\sigma_O(s) =\sim s$ y $\sigma_O(\alpha) =\sim \alpha$, observemos que $\sigma_O(t) = t'$ donde t' es una semirecta de origen O ya que O es obviamente fijo. Si $t' \neq\sim t$, t' debería estar incluida en alguno de los semiplanos abiertos de borde t, por ejemplo β. Así el ángulo $\widehat{tt'}$ no sería llano y estaría completamente incluido en β. Supongamos que s sea interior a $\widehat{tt'}$ entonces

$$\sigma_O\left(\widehat{tt'}\right) = \sigma_O\left(\widehat{ts} \cup \widehat{t's}\right) = \sigma_O\left(\widehat{ts}\right) \cup \sigma_O\left(\widehat{t's}\right) = \widehat{t' \sim s} \cup \widehat{t \sim s}$$

Pero este último miembro contendría al semiplano $\sim \beta$. y el semiplano β se transformaría en una parte propia del $\sim \beta$, lo que es absurdo. Este absurdo provino de suponer que $t' \neq\sim t$ por lo cual $t' =\sim t$ Se deja como ejercicio al lector que $\sigma_O(\beta) =\sim \beta$.■

Teorema 55. *La simetría central es involutiva*

Sea la simetría central σ_O y sean la semirecta cualquiera s de origen O y el semiplano α de borde esta semirecta vemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_O(\sigma_O(s)) &= \sigma_O(\sim s) =\sim (\sim s) = s \\
\sigma_O(\sigma_O(\alpha)) &= \sigma_O(\sim \alpha) =\sim (\sim \alpha) = \alpha
\end{aligned}$$

Pero este tipo de cosas lo hace la identidad, luego por el axioma de la t.r.$\sigma_O \circ \sigma_O = id$.■

Ejercicio 3.1.1. *El segmento* $\overline{OP}$ *es congruente con el* $\overline{O\sigma_O(P)}$ *Esto es,* O *es fijo en esta t.r. Además* O *es el punto medio de* $\overline{P\sigma_O(P)}$.

Ejercicio 3.1.2. *Las rectas que pasan por el centro de la simetría permanecen estables en esta simetría.*

Ejercicio 3.1.3. *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes*

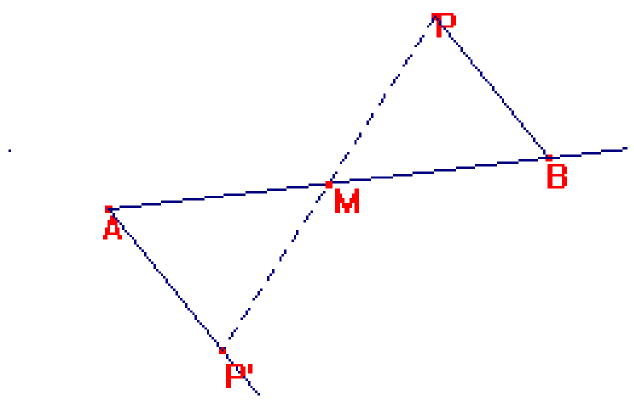
Ejercicio 3.1.4. *Dos ángulos adyacentes a un ángulo dado son congruentes.*

Ejercicio 3.1.5. *Toda simetría central tiene un único punto fijo que es su centro. (Sugerencia: Suponga la existencia de otro punto fijo* P *distinto del centro de la simetría* O *y considere la operación de la simetría sobre la semirecta* $\overrightarrow{OP}$*)*

Teorema 56. *Dados dos puntos* A *y* B *distintos sea* α *el semiplano determinado por la recta* $\overleftrightarrow{AB}$ *la t.r.* η *que cumple que* $\eta\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{BA}$ *y* $\eta(\alpha) = \sim\alpha$ *es una simetría central.*

Dejamos al lector la verificación de que η es involutiva. Tomemos P exterior a $\overleftrightarrow{AB}$ Sea $O = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{P\eta(P)}$ (Note que esta intersección existe pues P y $\eta(P)$ están en distinto semiplano con respecto a $\overleftrightarrow{AB}$). Además $\eta(O) = \eta\left(\overleftrightarrow{AB}\right) \cap \eta\left(\overleftrightarrow{P\eta(P)}\right) = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{P\eta(P)} = O$ (Ver ejercicio 2.2.34) Por tanto O es fijo. Asi $\eta\left(\overrightarrow{OB}\right) = \eta\left(\overline{OB} \cup \sim \overrightarrow{BA}\right) = \overline{OA} \cup \sim \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA}$. Por lo tanto esta es σ_O.

Ejercicio 3.1.6. *Existe el punto medio de cualquier segmento dado. Además este punto es único.*



Punto Medio

Ejercicio 3.1.7. *Toda t.r. involutiva tiene al menos un punto fijo.*

Ejercicio 3.1.8. *Toda t.r. involutiva tiene al menos una circunferencia estable.*

Teorema 57. *Una recta cualquiera que no pasa por el centro de simetría se transforma en una paralela a si misma*

Sean dos rectas t y t' de tal manera que $\sigma_O(t) = t'$ con t que no pasa por O. Supongamos $A = t' \cap t$ entonces $\sigma_O(A) = \sigma_O(t \cap t') = t' \cap t = A$ por lo cual A es fijo en esta simetría, lo que contradice el resultado del ejercicio 3.1.5. En sintesis t y t' son paralelas$\blacksquare$

Ejercicio 3.1.9. *Dada una recta r y un punto P exterior a r, existe una recta (al menos) que es paralela a r y que pasa por P. (Sugerencia: Considere una simetria central de centro el punto medio del segmento entre P y un punto cualquiera de la recta r)*

Ejercicio 3.1.10. *La simetría central de centro el centro de una circunferencia dada, deja fija a dicha circunferencia.*

Teorema 58. *Dos ángulos α y β congruentes tienen vértices O y O'. Si α tiene uno de sus lados la semirrecta $\overrightarrow{OO'}$ y β la semirrecta $\overrightarrow{O'O}$ y están en distintos semiplanos con respecto a la recta $\overleftrightarrow{OO'}$, entonces los lados restantes de α y β son paralelos.*

Si tomo la simetría central σ_M donde M es el punto medio del segmento $\overline{OO'}$, $\sigma_M(\alpha) = \beta$, de aquí que los otros dos lados sean paralelos, por ser uno la imagen del otro.$\blacksquare$

Ejercicio 3.1.11. *Usando transporte de ángulos y de segmentos desarrolle algún procedimiento para encontrar puntos medios y paralelas. Ver Figura* **??**

3.2.Simetría axial

Definición 59. *Sea r una recta del plano π. sea s una semirecta cualquiera incluida en r y α un semiplano de borde r. La t.r. σ_r es la simetría axial de eje r si $\sigma_r(s) = s$ y $\sigma_O(\alpha) =\sim \alpha$*

Ejercicio 3.2.1. *Cualquier semirecta en r serviría igualmente para definir σ_r*

Ejercicio 3.2.2. *Una simetria axiál cualquiera es involutiva.*

Ejercicio 3.2.3. *Los únicos puntos fijos de una simetría axial son los de su eje.*

Ejercicio 3.2.4. *Sea P un punto que no está en el eje de una simetría axial σ_r. El punto medio M del segmento $\overline{P\sigma_r(P)}$ está sobre r. Además una semirecta cualquiera de origen M que esté sobre r, forma con $\overrightarrow{MP}$ un ángulo recto.*

Ejercicio 3.2.5. *Existe un ángulo recto.*

Ejercicio 3.2.6. *Dado un ángulo recto $\widehat{st}$ la t.r. η que cumple que $\eta(s) = s'$ y $\eta(\alpha) = \alpha$, donde α es uno de los semiplanos determinados por s, es una simetría axial de eje la recta que contiene a t*

Ejercicio 3.2.7. *Dada una recta r y un punto P exterior a esta recta pasa una perpendicular a r por P.*

Teorema 60. *Dados dos semirrectas a y b distintas no opuestas, con el mismo origen O sea α el semiplano determinado por la semirrecta a que contiene a b y β el semiplano determinado por la semirrecta b que contiene a a, la t.r. η que cumple que $\eta(a) = b$ y $\eta(\alpha) = \beta$ es una simetría axial.*

Dejamos al lector la verificación de que η es involutiva. Tomemos $A \in a$ distinto de O que pasa por A. Sea $B = \eta(A)$ El punto medio M del segmento $\overline{AB}$ es fijo en esta t.r. involutiva, lo mismo que O. (Dejamos la justificación de esto último al lector). Por lo tanto la recta $\overleftrightarrow{OM}$ es estable, con todos sus puntos fijos en esta transformación. Además, los semiplanos determinados por $\overleftrightarrow{OM}$ en esta transformación se corresponden, luego esta t.r. es la simetría axial de eje $\overleftrightarrow{OM}$■

Ejercicio 3.2.8. *Todo ángulo convexo tiene una bisectriz*

Ejercicio 3.2.9. *Si una recta y su transformada por una simetría axial se cortan en un punto P, entonces P está sobre el eje de esta simetría.*

Ejercicio 3.2.10. *Un triángulo isosceles tiene dos ángulos congruentes*[1] *(Sugerencia: Si A es el vértice de intersección de los lados congruentes del tríangulo isosceles ABC, plantee la simetría axial que lleva $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{AC}$. Note que en este caso B es el transformado de C y reciprocamente.)*

Ejercicio 3.2.11. *Una t.r. que transforma una semirecta en su opuesta y que mantiene estables los semiplanos determinados por estas semirectas es una simetría axial. (Sugerencia: Tome un punto P que no esté en la recta que contiene a estas semirectas y analice el punto medio de este punto y su transformado)*

Ejercicio 3.2.12. *Dados dos puntos distintos A y B la t.r. que envia $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BA}$ manteniendo estables los semiplanos determinados por estas semirectas, es una simetría axial.*

Ejercicio 3.2.13. *Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes entonces es isosceles. (Considerar ejercicio 3.2.9)*

Ejercicio 3.2.14. *En un triángulo isosceles, la mediatriz de un lado coincide con la bisectriz del ángulo opuesto.*

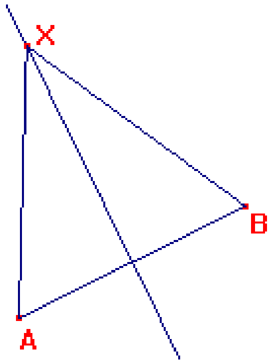
Ejercicio 3.2.15. *Dada una recta r y un punto P en la recta r, pasa una recta perpendicular a r por P.*

Ejercicio 3.2.16. *Dada una recta r y un punto P, pasa una única recta perpendicular a r por P. Discrimine los casos en que el punto este sobre la recta y en que no lo esté. (Sugerencia: Aplique el teorema 58)*

Ejercicio 3.2.17. *Una circunferencia con diámetro el eje de simetría de una simetría axial permanece estable.*

[1] Este teorema se conoce como Pons Ansinorum o Puente del Asno. Solía tomarse antiguamente como examen de ingreso a las universidades.

Ejercicio 3.2.18. *El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos fijos A y B es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.*



Mediatriz de un segmento

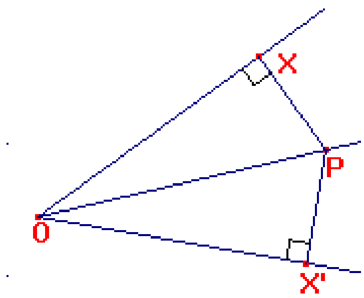
Ejercicio 3.2.19. *La opuesta de la bisectriz de un ángulo es la bisectriz del ángulo opuesto por el vértice.*

Ejercicio 3.2.20. *La bisectriz de un ángulo es perpendicular a la bisectriz del adyacente.*[2]

3.2.1. Equidistancia de puntos a rectas

Definición 61. *Sean dos puntos A y B y la recta r, sean A' y B' los puntos de intersección de las rectas perpendiculares a r desde A y B respectivamente, se dice que A y B son equidistantes a r si $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$.*

Ejercicio 3.2.21. *El lugar geométrico de los puntos en el interior de un ángulo que equidistan de los lados de dicho ángulo forman la bisectriz del ángulo.*

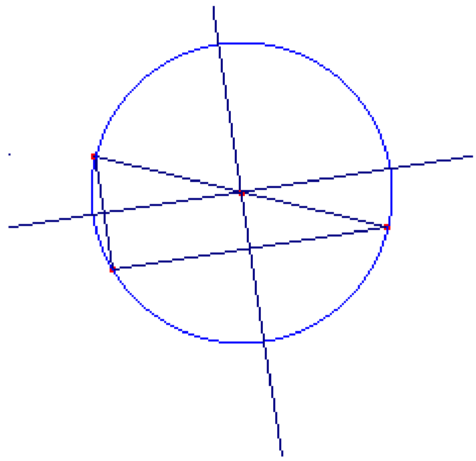


Bisectriz de un ángulo

[2] De esta forma las bisectrices determinadas por dos rectas secante se dice que forman una cruz de bisectrices.

Ejercicio 3.2.22. *La composición de simetrías axiales de ejes perpendiculares es una simetría central de centro el punto de intersección de los ejes. La composición de una simetría axiál de eje r con una simetría central de centro O es una simetría axial de eje una recta perpendicular al eje r que pasa por O.*

Ejercicio 3.2.23. *Las mediatrices de los catetos de un triángulo rectángulo se cortan en el punto medio de la hipotenusa. La circunferencia que tiene por diámetro el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, pasa por el ángulo recto*



Circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo rectángulo

Ejercicio 3.2.24. *Las mediatrices de las cuerdas pasan por el centro de la circunferencia.*

Ejercicio 3.2.25. *Dadas dos circunferencias que se cortan en dos puntos, la mediatriz de la cuerda común es también un diámetro común.*

Teorema 62. *Todo punto B de una circunferencia de diámetro $\overline{AC}$ es el vértice de un ángulo recto $\widehat{ABC}$*

En la simetría axial de eje la mediatríz del segmento $\overline{AB}$, el punto C se transformará en un punto C' sobre la circunferencia antipodal a B, por ejercicio 3.2.24. En definitiva, si aplicamos esta simetría axial y luego un simetría central de centro el centro de la circunferencia y se llega a que la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ se transformará en una paralela, y como por ejercicio 3.2.22 la esta composición es una simetría axial le ángulo en B debe ser recto.■

3.3. Traslaciones

Definición 63. *Sean los puntos A y A', y sea α uno de los semiplanos definidos por $\overleftrightarrow{AA'}$ La t.r. tal que $\eta\left(\overrightarrow{AA'}\right) =\sim \overrightarrow{A'A}$ y $\eta(\alpha) = \alpha$, se llama traslación de módulo*[3] $\overline{AA'}$ *y se denota por $\tau_{\overline{AA'}}$. La identidad se considera una traslación de módulo cero. A la recta $\overleftrightarrow{AA'}$ se le llama guia de la traslación*

Ejercicio 3.3.1. *Ningún punto de la guía en una traslación distinta de la identidad, se mantiene fijo (Sugerencia: Suponga fijo P en la $\tau_{\overleftrightarrow{AA'}}$. Observe lo que pasaría con el segmento $\overline{AP}$. ¿Puede P estar entre A y A'?)*

Teorema 64. $\tau_{AA'} = \sigma_{A'} \circ \sigma_M$ *donde M es el punto medio de $\overline{AA'}$.*

Calculemos $\sigma_{A'} \circ \sigma_M \left(\overrightarrow{AA'}\right) = \sigma_{A'}\left(\overrightarrow{A'A}\right) =\sim \overrightarrow{A'A}$, Por otro lado, $\sigma_{A'} \circ \sigma_M(\alpha) = \sigma_{A'}(\sim \alpha) = \alpha$.

Ejercicio 3.3.2. $\tau_{AA'} = \sigma_M \circ \sigma_A$ *donde M es el punto medio de $\overline{AA'}$*

Ejercicio 3.3.3. $\tau_{AA'} = \sigma_m \circ \sigma_{a'}$ *donde m es la mediatriz de $\overline{AA'}$ y a' es una perpendicular a $\overleftrightarrow{AA'}$ por A'.*

Ejercicio 3.3.4. *Las rectas correspondientes en una traslación son paralelas.*

Para poder actuar con más libertad, y hacer más fluida la relación entre las simetrías y las traslaciones, es necesario admitir una suposición más que se conoce como el axioma de las paralelas

Axioma 11. *Existe una única paralela que pasa por un punto dado a una recta dada.*[4]

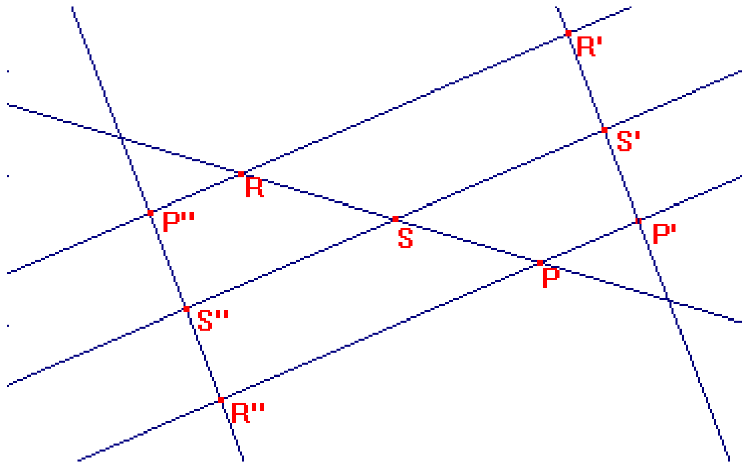
[3] Se le puede llamar segmento orientado. En definitiva quiere decir que se puede decidir sobre que extremo será la punta y cual la cola. De ahora en más en un segmento orientado $\overline{AB}$, A será la cola y B sera la punta.

[4] Este axioma resultó un punto de discusión de muchos matemáticos desde que los antiguos griegos lo postularon hasta la primera mitad del siglo XIX. La controversia tenía que ver sobre si este axioma podía desprenderse de la estructura axiomática anterior como un teorema. A este axioma se le llama el quinto postulado de Euclides

Ejercicio 3.3.5. *Dadas dos paralelas existe una simetría central, una traslación y una simetría axial que manda una paralela en otra. (Note que las partes recíprocas de este enunciado las consideramos anteriormente.)*

Ejercicio 3.3.6. *Si una recta corta una recta de un haz de rectas paralelas, corta todas las demás.*

Teorema 65. *Sean tres paralelas r, s, p y t una transversal de tal modo que las paralelas determinan sobre t segmentos congruentes, entonces determinarán segmentos congruentes sobre cualquier otra transversal*[5].



Paralelas cortadas por una transversal

Sean R, S y P los puntos de la intersección de t con las tres paralelas r, s, p respectivamente y sean R', S' y P' los puntos de la intersección de t', una transversal cualquiera, con las tres paralelas r, s, p respectivamente. Supongamos que $\sigma_s(R) = P$. En esta simetría, el trío de paralelas permanece estable y la recta t' se transformará en una paralela, digamos t''. Sea τ la traslación que lleva $\sigma_s(S') = S''$ en S'. En esta traslación, el trío de paralelas permanece estable y la recta t'' se transformará en t'. Notemos que $\tau(\sigma_s(P')) = R'$, pues $\sigma_s(P')$ está en r lo mismo que R'. Es inmediato que $\tau\left(\sigma_s\left(\overline{P'S'}\right)\right) = \overline{R'S'}$■

Ejercicio 3.3.7. *Si en un triángulo se traza la paralela a uno de los lados por el punto medio de otro lado, esta pasará por el punto medio del tercer lado. El Segmento entre los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo y congruente con la mitad del tercer lado.*

[5] Este resultado se puede considerar como parte de un resultado más general llamado teorema de Thales.

Definición 66. *Al segmento entre los puntos medios de los lados de un triángulo se le llama base media. El triángulo formado por las bases medias se le llama triángulo medial*

Ejercicio 3.3.8. *Los ángulos (internos) de un triángulo suman un llano. (Sugerencia: Trace una paralela a uno de los lados por el correspondiente vértice opuesto)*

Ejercicio 3.3.9. *Los ángulos exteriores de un triángulo son iguales a la suma de los no adyacentes. Naturalmente, un ángulos exterior es mayor que cualquiera de los otro ángulos no adyacentes con el.*

Ejercicio 3.3.10. *En un triángulo solamente puede haber un ángulo recto. Lo mismo es cierto para los obtusos.*

Ejercicio 3.3.11. *Si el doble de un ángulo α es congruentes con el doble de un ángulo β, entonces $\alpha \equiv \beta$. Generalice este resultado.*

Ejercicio 3.3.12. *Todos los ángulos interiores de todos los triángulos equiláteros son congruentes.*

Ejercicio 3.3.13. *Una composición de simetrías centrales de distinto centro no tiene puntos fijos. O sea, si la traslación tiene puntos fijos es la identidad. (Sugerencia: Suponga P fuera de la recta $\overleftrightarrow{MA}$ (¿Por qué?) y analice el comportamiento de la recta $\overleftrightarrow{PA}$ en la transformación $\sigma_M \circ \sigma_A$. Recuerde el axioma de las paralelas)*

Ejercicio 3.3.14. $\overline{P\tau_{\overleftrightarrow{AA'}}(P)}$ *es congruente y paralelo a* $\overline{AA'}$. *(Sugerencia: Considere la simetría central σ_M donde M es el punto medio del segmento $\overline{PA'}$.)*

Ejercicio 3.3.15. *Las rectas paralelas a la guía permanecen estables.*

Ejercicio 3.3.16. *Dos perpendiculares a dos paralelas son paralelas. Note que esto es equivalente a decir que si dos rectas son secantes las perpendiculares respectivas también serán secantes.*

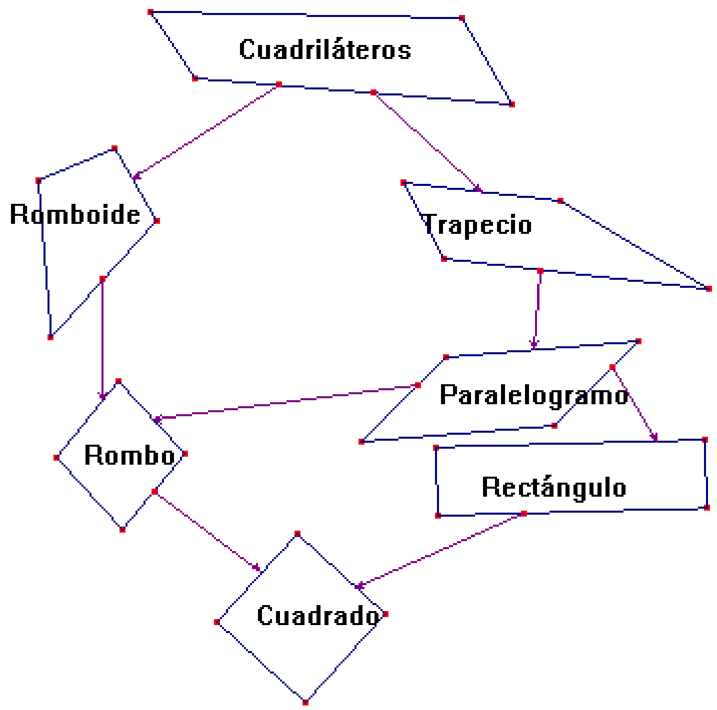
Ejercicio 3.3.17. $\tau_{\overline{BC}} \circ \tau_{\overline{AB}} = \tau_{\overline{AC}} = \tau_{\overline{AB}} \circ \tau_{\overline{BC}}$. *(Se dice que las traslaciones conmutan en la composición. Note que las simetrías centrales y axiales no gozan, en general de esta propiedad)*

Ejercicio 3.3.18. $\tau_{\overline{BC}} \circ \tau_{\overline{AB}} = \tau_{\overline{DC}} \circ \tau_{\overline{AD}}$

Ejercicio 3.3.19. $(\tau_{\overline{AB}})^{-1} = \tau_{\overline{BA}}$

3.3.1. Aplicaciones a cuadriláteros

Definición 67. *Los cuadrilateros con dos pares de lados opuestos paralelos se llaman paralelogramos. Los rectángulos son cuadriláteros con los cuatro ángulos congruentes. Un trapecio es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos. Un romboide es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados congruentes. Un rombo es un cuadrilátero con todos los lados congruentes. Si un rombo es un rectángulo se le llama cuadrado.*



Clasificación de cuadriláteros

Ejercicio 3.3.20. *Los paralelogramos tienen dos pares de lados congruentes y las diagonales se intersecan. También si un cuadrilátero tiene dos pares de lados opuestos congruentes o si tiene las diagonales que se bisecan entonces es un paralelogramo.*

Ejercicio 3.3.21. *Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes. Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.*

Ejercicio 3.3.22. *Si un cuadrilátero cumple que los pares de ángulos consecutivos son congruentes, entonces es un paralelogramo.*

Ejercicio 3.3.23. *Los rectángulos son paralelogramos. Además, los rectángulos tienen todos sus ángulos rectos.(Sugerencia: Plantee una simetría axial de eje la mediatriz m del lado AB y considere los ángulos $\widehat{ACD}, \widehat{AC\sigma_m(C)}, \widehat{CDB}$ y $\widehat{C\sigma_m(C)B}$ y concluya que deben ser necesariamente iguales.)*[6]

Ejercicio 3.3.24. *Los cuadriláteros que tienen dos pares de lados consecutivos congruentes tienen diagonales que se cortan perpendicularmente*[7] *(Sugerencia: Considere el Pons Ansinorum y plantee una simetría axial)*

Ejercicio 3.3.25. *Un rombo es un paralelogramo.*

3.3.2.Primeros tres criterios de congruencia de triángulos

Teorema 68. *Dos triángulos con dos lados y el ángulo comprendido entre ambos lados congruentes respectivamente son congruentes.*

Sean dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que cumplen que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ con $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Sea η tal que $\eta\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'}$ y $\eta(\alpha) = \alpha'$ donde α es el semiplano de borde la semirecta $\overrightarrow{AB}$ que contiene a C y α' es el semiplano de borde la semirecta $\overrightarrow{A'B'}$ que contiene a C'. Por los teoremas de transporte de ángulos y segmentos $\eta\left(\widehat{ABC}\right) = \widehat{A'B'C'}$, $\eta\left(\overline{BC}\right) = \overline{B'C'}$ y $\eta\left(\overline{AB}\right) = \overline{A'B'}$. Por lo cual $\eta(C) = C'$ y $\eta(A) = A'$ y entonces $\eta\left(\widehat{BCA}\right) = \widehat{B'C'A'}$, $\eta\left(\widehat{CAB}\right) = \widehat{C'A'B'}$ y $\eta\left(\overline{CA}\right) = \overline{C'A'}$

Ejercicio 3.3.26. *Sean dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que cumplen que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ con $\widehat{ABC} > \widehat{A'B'C'}$, entonces $\widehat{ABC} > \widehat{A'B'C'}$*

Ejercicio 3.3.27. *Sean dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que cumplen que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ y $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, entonces los triángulos son congruentes.*

Ejercicio 3.3.28. *Sean dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que cumplen que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ y $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, entonces los triángulos son congruentes. (Sugerencia: Plantee una transformación $\eta\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'}$ y $\eta(\alpha) = \alpha'$ de tal modo que $C \in \alpha$ y $C'' = \eta(C') \in \alpha'$ Note que C y C'' equidistan de A y de B.)*

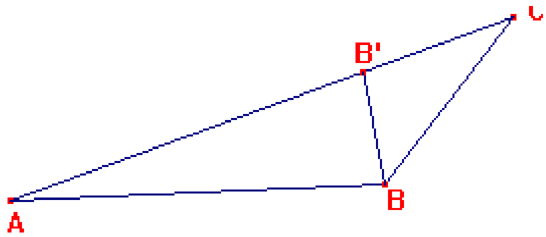
[6] Se podría haber aceptado como definición que : Los rectángulos son cuadriláteros con los cuatro ángulos rectos.

[7] Este tipo de cuadrilateros se les llama romboides.

Antes de avanzar en el cuarto criterio de congruencias de triángulos es necesario tratar el siguiente resultado

3.3.3. Relaciones entre lados y ángulos de un triángulo

Teorema 69. *En un triángulo, a ángulos mayores se le oponen lados mayores y recíprocamente.*



Sea el triángulo ABC y sea $\overline{AB} < \overline{AC}$. Tomemos un punto $B' \in \overline{AC}$ de tal modo que $\overline{AB} \equiv \overline{AB'}$ y el triángulo isosceles ABB' con ángulos en B y en B' congruentes. Entonces tendremos que $\widehat{ABC} > \widehat{ABB'} \equiv \widehat{AB'B} > \widehat{ACB}$. La última desigualdad se prueba pues $\widehat{AB'B}$ es un ángulo exterior del triángulo BCB'. Recíprocamente, si $\widehat{B} > \widehat{C}$, entonces $b > c$. Si este no fuera el caso es decir si $b \leq c$, debería ser $\widehat{B} \leq \widehat{C}$, contradiciendo la demostración anterior.

Ejercicio 3.3.29. *La hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre mayor que cualquiera de los catetos.*

Ejercicio 3.3.30. *En un triángulo todo lado es menor que la suma de los otros dos. (Sugerencia: Basta considerar a a como el mayor de los lados y tomar un punto A' en el, de tal modo que ABA' sea un triángulo isosceles. Note que el $\widehat{AA'C}$ debe ser mayor que el $\widehat{A'AC}$. Concluya que $\overline{A'C} < b$)*

Ejercicio 3.3.31. *En un triángulo todo lado es mayor que la diferencia de los otros dos.*

Ejercicio 3.3.32. *Explique la frase coloquial que dice que "el camino sobre una poligonal es siempre mayor que el camino sobre una linea recta"*

Ejercicio 3.3.33. *Dada una recta r y un punto P, $\overline{PP'} < \overline{PX}$, donde P' es el pie de la perpendicular a r desde P y X es un punto en r distinto de P' (El camino más corto a una recta es perpendicularmente a esta)*

3.3.4.Cuarto caso de congruencias de triángulo

Teorema 70. *Sean los triangulos ABC y $A'B'C'$ de tal modo que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ y $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, con $\overline{AC} > \overline{AB}$, entonces ABC y $A'B'C'$ son congruentes.*

Sea la t.r η tal que $\eta\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{A'B'}$ y $\eta(\alpha) = \alpha'$, donde el semiplano α es el contiene a C y el α'el que contiene a C'. Sea $C'' = \eta(C)$. Supongamos primeramente que C'' esté entre B' y C'. Esto no es posible pues al ser $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \equiv \overline{A'C'}$ el triángulo $C'A'C''$ es isosceles. De este modo $\widehat{A'C''C} > \widehat{B'}$ por ser $\widehat{A'C''C}$ un exterior no adyacente a $\widehat{B'}$, y $\widehat{C'} \equiv \widehat{A'C''C} > \widehat{B'}$. Pero entonces $\overline{A'C'} < \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} < \overline{AB}$ contra lo supuesto. El caso en que C' esté entre B' y C'' se lo dejamos al lector. En resumen $C'' = C'$■

Ejercicio 3.3.34. *Repase este escrito pero teniendo en cuenta los criterios de congruencia.*

Ejercicio 3.3.35. *Enuncie criterios de congruencia para triángulos rectángulos.*

3.3.5.Intersecciones de Cevianas

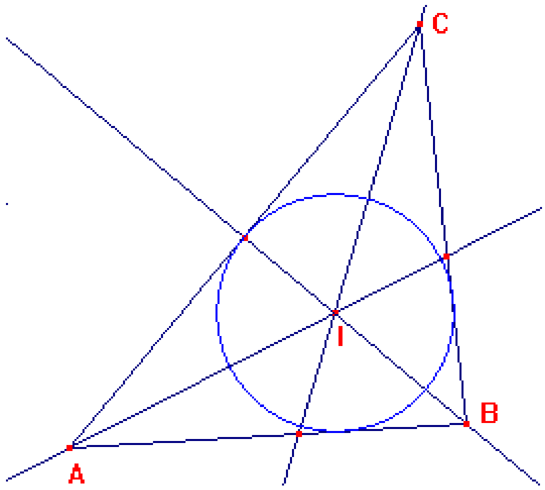
Definición 71. *Las palabras bisectriz, mediana y alturas de un triángulo serán usadas para representar varios entes geométricos. Pero en el contexto debe quedar completamente claro al ente al que nos referiremos. Así la bisectriz es también el segmento en el triángulo de la semirrecta bisectriz del ángulo correspondiente. La mediana es el segmento entre un vértice y el punto medio del lado opuesto, o la recta que lo contiene. La altura es un segmento perpendicular a un lado desde el lado al vértice opuesto o la recta que lo contiene.*

3.3.6.El incentro

Ejercicio 3.3.36. *Las bisectrices se cortan en el interior del triángulo.*

Ejercicio 3.3.37. *Las bisectrices se cortan de a tres. (Sugerencia: Recuerde que los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo)*

Definición 72. *El lugar de corte de las bisectrices se llama incentro.*



Las bisectrices, el incentro y la circunferencia inscrita

Ejercicio 3.3.38. *El incentro equidista de los lados del triángulo.*

Definición 73. *Una recta es tangente a una circunferencia si toca a la circunferencia en un punto y deja a la circunferencia enteramente en un semiplano. Al punto común se le llama punto de tangencia.*

Ejercicio 3.3.39. *La recta perpendicular a un radio por un punto de la circunferencia es tangente a la circunferencia. (Sugerencia: Considere la simetría axial de eje la recta que contiene a dicho radio)*

Teorema 74. *Si una recta es tangente a una circunferencia es perpendicular al radio por el punto de tangencia.*

Si no fuera perpendicular al radio por el punto de tangencia P, habría un punto Q que sería el pie de la perpendicular desde el centro O de la circunferencia. Naturalmente $\overline{OP} > \overline{OQ}$ y de este modo podría encontrarse un punto Q' de tal modo que $Q \in \overline{OQ'}$ y que $\overline{OQ'} \equiv \overline{OP}$. Pero en este caso Q' sería punto de la circunferencia y estaría en un semiplano distinto de Q'' simetrico con respecto a O de Q', lo que es absurdo.

Ejercicio 3.3.40. *Existe una única circunferencia tangente a los lados de un triángulo dado. El centro es el incentro.*

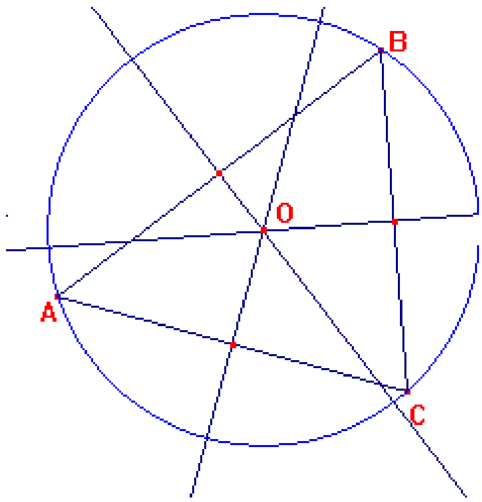
Definición 75. *Una circunferencia se dice inscrita en un triángulo si es tangente a los lados del triángulo.*

Ejercicio 3.3.41. *La circunferencia inscrita en un triángulo es estable en una simetriá axial con eje una bisectriz de un ángulo del triángulo.*

3.3.7.El circuncentro

Ejercicio 3.3.42. *Las mediatrices de (los lados de) un triangulo se cortan.*

Ejercicio 3.3.43. *Las mediatrices de un triángulo se cortan de a tres. (Sugerencia: Recuerde que los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento)*



Las mediarices, el circuncentro y la circunferencia circunscrita

Definición 76. *El lugar de corte de las mediatrices se llama circuncentro.*

Ejercicio 3.3.44. *El circuncentro equidista de los vértices del triángulo*

Ejercicio 3.3.45. *Existe una única circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo dado. El centro es el circuncentro.*

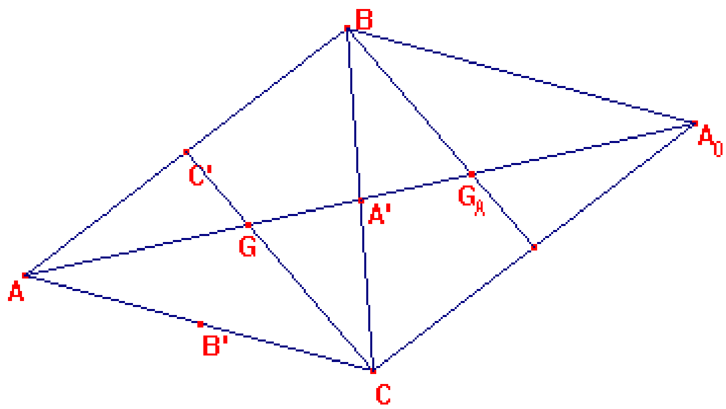
Ejercicio 3.3.46. *Una simetría axial de eje una mediatriz de un triángulo deja estable la circunferencia circuncrita*

3.3.8.El baricentro

Ejercicio 3.3.47. *Las medianas de un triángulo se cortan en el interior del triángulo.*

Teorema 77. *Las medianas de un triángulo se cortan de a tres.*

Sea ABC un triángulo sean A', B' y C' los puntos medios de los lados a, b y c respectivamente. Sea $\sigma_{A'}(G) = G_A$ donde G es el lugar de corte de las medianas m_A y m_C. Note que usando el resultado del ejercicio 3.3.7 aplicado al triángulo ABG_A se llega a que $\overline{GG_A} \equiv \overline{AG}$. Como $\overline{A'G_A} \equiv \overline{A'G}$. queda que la mediana m_C se corta a m_A a la tercera parte de su longitud. Intercambiando los papeles de C por B se llegaría a que las medianas se cortan de a tres.■



Las medianas y el baricentro

Definición 78. *Al lugar de corte de las medianas de un triángulo se le llama baricentro*[8]

3.4.Rotaciones

Definición 79. *Sean las semirrectas a y a', de origen común O y sea α el semiplano de borde a que contiene a a' y α' el semiplano de borde a' que no contiene a a La t.r. tal que $\eta(a) = a'$ y $\eta(\alpha) = \alpha'$, se llama rotación de centro O y angulo*

[8] Se le llama a este punto centro de masa o centroide. La razón mecánica de esta denominación se debe a que las medianas dividen al triángulo en dos triángulos de igual superficie. De este modo, si tuvieramos una chapa triángular delgada de algún material de densidad de masa uniforme, al colgarlo de su baricentro la chapa permanecería en equilibrio.

orientado $\widehat{aa'}$ *y se denota por* $\rho_{O,\widehat{aa'}}$. *La identidad se considera una rotación de ángulo orientado cero.*

Ejercicio 3.4.1. *Ninguna semirrecta que pase por el centro de la rotación distinta de la identidad, se mantiene fija (Sugerencia: Suponga fija* r *en la* $\rho_{O,\widehat{aa'}}$. *Observe lo que pasaría con el ángulo* $\widehat{ar}$. *¿Puede* r *estar entre* a *y* a'*?)*

Ejercicio 3.4.2. $\rho_{O,\widehat{aa'}} = \sigma_{a'} \circ \sigma_b$ *donde* b *es la bisectriz de* $\widehat{aa'}$.

Ejercicio 3.4.3. $\rho_{O,\widehat{aa'}} = \sigma_b \circ \sigma_a$ *donde* b *es la bisectriz de* $\widehat{aa'}$.

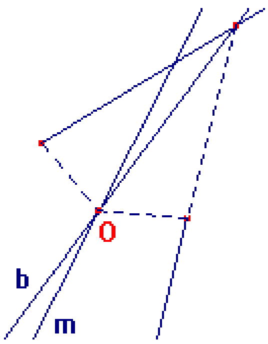
Ejercicio 3.4.4. *La simetría central es una rotación.*

Ejercicio 3.4.5. *Las rectas correspondientes en una rotación distinta de la identidad y de la simetría central son secantes.*

Ejercicio 3.4.6. $\widehat{PO\rho_{O,\widehat{aa'}}(P)}$ *con* P *distinto de* O *es congruente a* $\widehat{aa'}$. *(Sugerencia: Considere la simetría axial* σ_b *donde* b *es la bisectriz del ángulo* $\widehat{O\overrightarrow{P}a'}$.*)*

Ejercicio 3.4.7. *Las Circunferencias permanecen estables en una rotación de centro el centro de la circunferencia.*

Ejercicio 3.4.8. *Dadas dos semirectas correspondientes en una rotación entonces el centro de la rotación se encuentra en la mediatriz del segmento determinado por los orígenes de las semirrectas y en la bisectriz de uno de los ángulos determinados por las rectas que contienen a dichas semirrectas.*



Determinación del centro de giro de una rotación

Ejercicio 3.4.9. *Determine un procedimiento para encontrar el centro de una rotación dadas dos semirrectas correspondientes en una rotación. De condiciones para la resolución.*

Ejercicio 3.4.10. $\rho_{O,\widehat{bc}} \circ \rho_{O,\widehat{ab}} = \rho_{O,\widehat{ac}}$

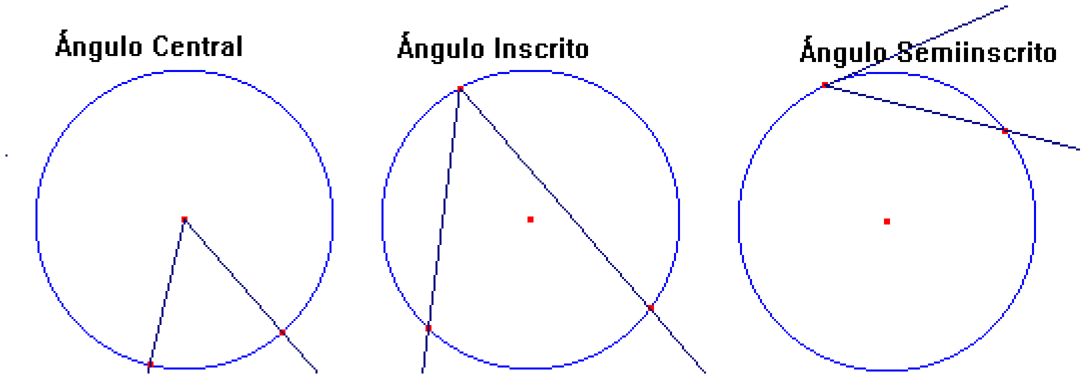
Ejercicio 3.4.11. $\left(\rho_{O,\widehat{ab}}\right)^{-1} = \rho_{O,\widehat{ba}}$

Ejercicio 3.4.12. *La composición de dos rotaciones de distinto centro es una rotación o una traslación. Cuando la composición de las rotaciones es una traslación, una de las rotaciones es de ángulo inverso de la otra.*

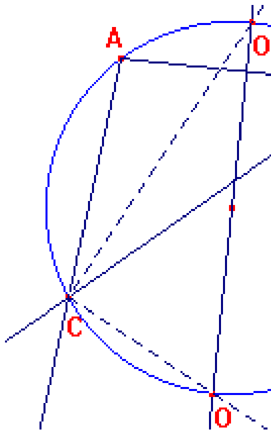
4. Problemas de Aplicación

4.1.El teorema del ángulo inscrito

Definición 80. *Un ángulo se le llama inscrito (en una circunferencia) si su vértice está en la circunferencia y sus lados cortan la circunferencia. Un ángulo se llama semiinscrito si su vértice está en la circunferencia y uno de sus lados es tangente a la circunferencia y el otro corta a la circunferencia. Un ángulo se llama central si su vértice está en el centro de la circunferencia.*



Teorema 81. *Los puntos de intersección de las rectas de un haz de semirectas homólogas en una rotación se encuentran en una circunferencia.*



Sea A el origen de las semirectas de un haz y sea B el origen de las transformadas. Sea O el centro de giro y O' el centro de la rotación que envia las semirectas de A en las opuestas de las correspondientes en la rotación de centro O. Sabemos que tanto por O como por O' pasa la mediatriz al segmento $\overline{AB}$. Por otro lado, Sea C un punto de intersección entre una semirrecta y su correspondiente, las bisectrices determinadas por las semirrectas serán perpendiculares y pasarán respectivamente por O y por O'. Por lo último el triángulo OCO' será rectángulo con un ángulo recto en C. La circunferencia circunscrita en OCO' tiene como centro el punto medio de $\overline{OO'}$, por ser OCO' rectángulo (Ver ejercicio 3.2.23).

Ejercicio 4.1.1. *Dados dos X y Y de una circunferencia que se encuentra en el mismo semiplano con respecto a una cuerda $\overline{AB}$ de la circunferencia cumplen que*

$$\widehat{AXB} \equiv \widehat{AYB}$$

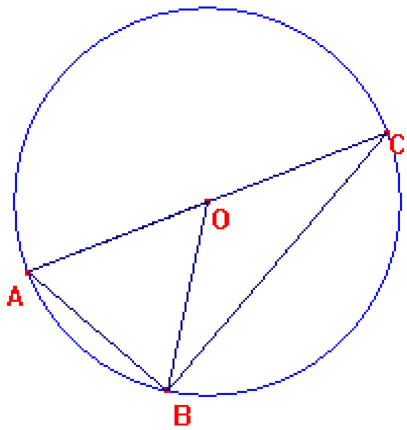
(Sugerencia: Suponga algún punto de la circunferencia que no cumpla con esta ultima congruencia y llegue a que deben haber tres puntos alineados en una circunferencia)

Ejercicio 4.1.2. *Todos los ángulos inscritos que subtienden una cuerda fija cuyos vértices están del mismo lado con respecto a la cuerda, son congruentes.*

Ejercicio 4.1.3. *Los angulos inscritos que subtienden una cuerda desde distintos semiplanos de la cuerda son suplementarios.*

Ejercicio 4.1.4. *Un ángulo seminscrito que tiene un lado que contiene una cuerda fija es congruente con algún ángulo inscrito que subtiende la misma cuerda.*

Ejercicio 4.1.5. *Los ángulos inscritos que subtienden una cuerda, con el vértice en el mismo lado con respecto a esta cuerda que el centro de una circunferencia son iguales a la mitad del ángulo central que subtiende la misma cuerda. (Sugerencia: Observe en la figura que* $\widehat{AOB} = \widehat{OCB} + \widehat{OBC}$*, Además* OCB *es isosceles)*



Definición 82. *Un cuadrilátero se dice inscribible (en una circunferencia) si sus vértices son puntos de la circunferencia*

Ejercicio 4.1.6. *Los cuadriláteros inscribibles tienen ángulos opuestos que son suplementarios*

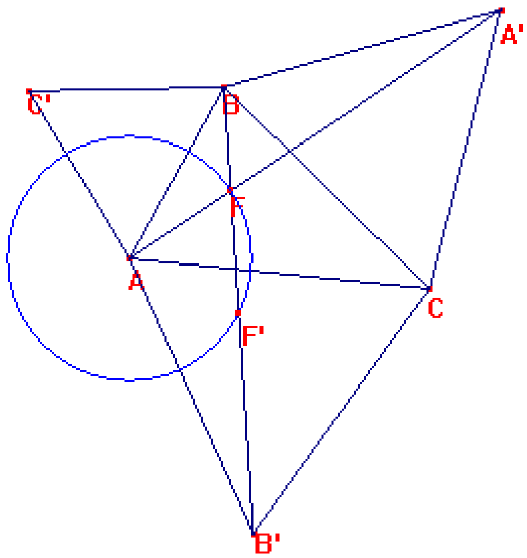
Ejercicio 4.1.7. *Si un cuadriátero tiene ángulos opuestos que son suplementarios, es inscribible.*

Ejercicio 4.1.8. *Los rectángulos son inscribibles*

4.2.El Problema de Fermát y el triángulo de Napoleón

Teorema 83. *Si sobre los lados de un triángulo* ABC *cualquiera se construyen triángulos equiláteros exteriores* ABC', $AB'C$ *y* $A'BC$*, entonces los segmentos*

$\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son congruentes y se cortan de a tres en un punto F llamado de Fermat o de Torricelli.

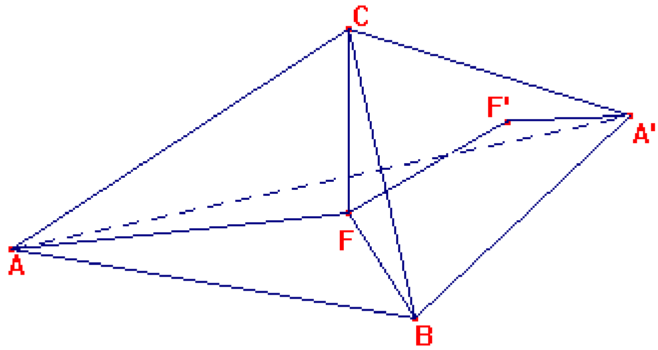


El Punto de Fermát

Para mostrar que los segmentos $\overline{AA'}$, y $\overline{BB'}$ son congruentes basta plantear la rotación de centro C que lleva B' a A. Para mostrar que estos segmentos se cortan en el punto F, que es la intersección de los segmentos $\overline{AA'}$, y $\overline{BB'}$ observemos primeramente que el ángulo $\widehat{AFB'}$ es congruente con el ángulo de giro $\widehat{B'CA}$. Sea la rotación ρ_A de centro A tal que $\rho_A(C) = B'$. Se cumple que $\rho_A\left(\overline{C'C}\right) = \overline{BB'}$ y que $\rho_A(F) = F'$. De este modo $F' \in \overline{BB'}$ pues FAF' es equilátero. Pensando en $(\rho_A)^{-1}$ queda que $F \in \overline{CC'}$.

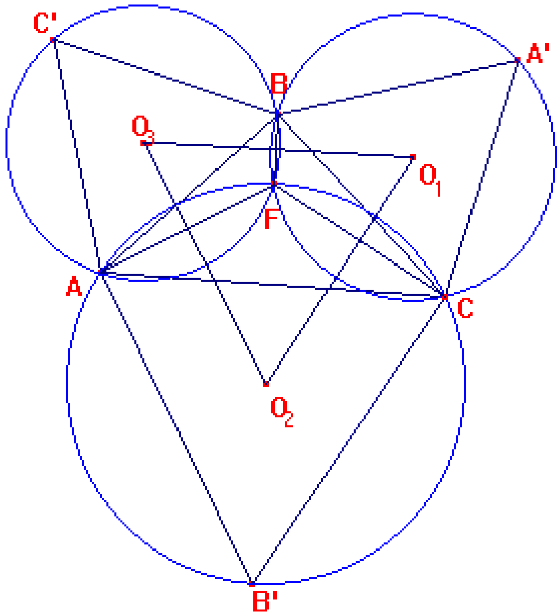
Ejercicio 4.2.1. *Explique el siguiente comentario "En una sala triangular donde todos los ángulos son menores que un recto, si una persona estaría parada en el punto de Fermat creería que la sala es un triángulo equilátero". (Sugerencia: el triángulo AFB en la figura es las dos terceras partes de un llano)*

Ejercicio 4.2.2. *El punto de Fermát en un triángulo acutángulo es el que minimiza la suma de los segmentos a los vértices. (Sugerencia: Tome un punto cualquiera en el interior del triángulo (Por ejemplo el punto F en la figura) y plantee una rotación de centro cualquier vértice (Por ejemplo el punto C en la* *figura) del triángulo y ángulo la tercera parte de de un llano hacia afuera del triángulo. Note que la poligonal $AFF'A'$ es de mayor longitud que AA')*



Ejercicio 4.2.3. *Las circunferencias circunscritas a los triángulos equilateros en el problema de Fermát se cortan en el punto de Fermát. Además las cuerdas comunes de a pares de las circunferencias forman ángulos que son el doble de la tercera parte de un llano. Por último, uniendo el centro de las circunferencias, que son*

los centros de los triángulos equilateros queda formado un triángulo equilátero.[1]



(Sugerencia: Plantee la rotación que lleva la $\overrightarrow{FB}$ en la $\overrightarrow{FC}$ Observe que el transformado del segmento $\overline{O_3O_1}$ sera un paralelo del $\overline{O_1O_2}$

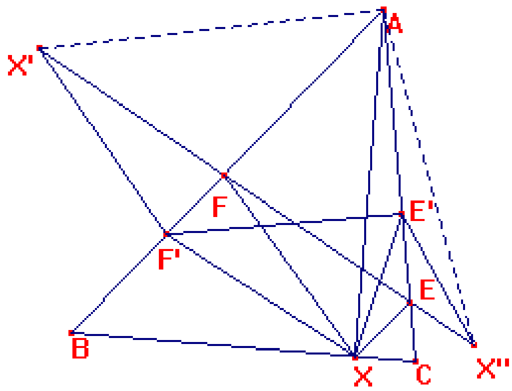
4.3.Problema de Fagnano.

Ejercicio 4.3.1. *Si dos triángulos isosceles tienen los lados congruentes respectivamente congruentes entre ambos triángulos, el que tenga mayor ángulo adyacente a los segmentos congruentes tendra mayor lado opuesto (Aplicar ejercicio 3.3.26)*

Ejercicio 4.3.2. *Sea el triángulo acutángulo ABC y sea X un punto sobre el lado BC. Sea $\sigma_{\overleftrightarrow{AB}}(X) = X'$ y $\sigma_{\overleftrightarrow{AC}}(X) = X''$. El triángulo XAX'' es isosceles y $\widehat{XAX''}$ es el doble de $\widehat{BAC}$. Si el punto X es la altura desde A, el segmento $\overline{XX''}$ es el menor posible y es igual a la suma de los lados de un triángulo formado por los pies de las alturas llamado órtico. (Sugerencia: Note que de todos los triángulos inscritos que tienen uno de los vértices en X el de menor perímetro*

[1] A este triángulo se le llama triángulo de Napoleón, en honor a Napoleón Bonaparte. Muchos opinan que dificilmente pudiera haberse debido a Napoleón, pués este no tenía las capacidades geométricas suficientes para desarrollar este Teorema.

será el que tiene los otros vértices F y E alineados con X' y X''. Por ejemplo la poligonal $X'F'E'X''$ tiene la misma suma de los lados que el triángulo $E'XF'$, y esta es mayor que $\overline{X'X''}$. Por otro lado, si X no fuera el pie de la altura desde A, el segmento $\overline{X'X''}$. sería mayor (Vea el ejercicio 4.3.1))

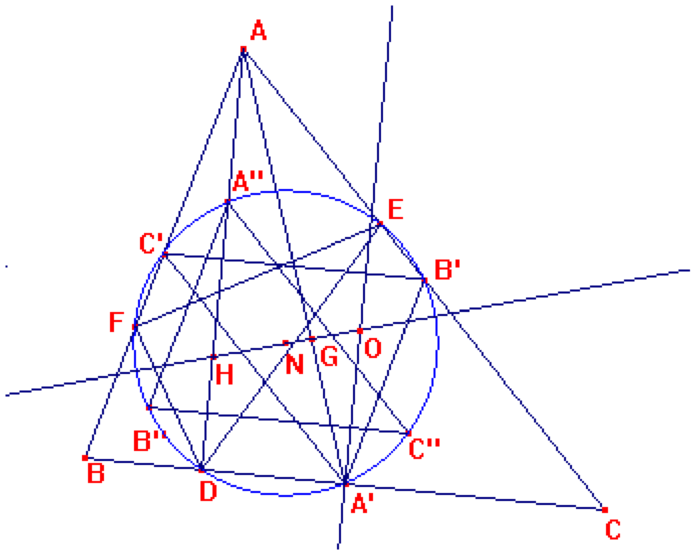


Problema de Fagnano

Ejercicio 4.3.3. *El triángulo inscrito en un triángulo acutángulo, de menor perímetro es el triángulo órtico.*

4.4. La Circunferencia de los Nueve Puntos y la Recta de Euler.

Ejercicio 4.4.1. *El triángulo medial $A'B'C'$ de un triángulo ABC de circuncentro O y de ortocentro H es congruente con los triángulos $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, y con el triángulo $A''B''C''$, donde A'', B'' y C'' son los puntos medios de los segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$ respectivamente.(Sugerencia: Plantee la simetría central de centro la intersección de $\overline{AA'}$ con $\overline{B'C'}$ y luego la traslación que lleva el ortocentro* de $AB'C'$ a O)



Circunferencia de los nueve puntos y Recta de Euler

Ejercicio 4.4.2. *Los segmentos* $\overline{A'A''}, \overline{B'B''}$ *y* $\overline{C'C''}$ *se cortan de a tres y son congruentes, donde* A'', B'' *y* C'' *son los puntos medios de los segmentos* $\overline{AH}, \overline{BH}$ *y* $\overline{CH}$ *respectivamente, siendo* H *el ortocentro de* ABC*. Con esto pruebe que la circunferencia circunscrita en* $A'B'C'$ *coincide con la de* $A''B''C''$*. (Sugerencia: Observe que* $A'B'A''B''$ *es un rectángulo)*

Ejercicio 4.4.3. *La circunferencia circunscrita en* $A'B'C'$ *coincide con la circunferencia circunscrita en el triángulo órtico* DEF*.*[2] *(Sugerencia:* $\widehat{A'DA''}$ *es recto)*

Ejercicio 4.4.4. *El segmento* $\overline{AH}$ *es el doble del* $\overline{A'O}$*.*

Ejercicio 4.4.5. *La recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro contiene el centro de la circunferencia de los nueve puntos y además el baricentro. Esta recta se la conoce como Recta de Euler.*

[2] Esta circunferencia se la conoce con el nombre de circunferencia de los nueve puntos o de Feuerbach.)