

1 Un ejercicio resuelto de ecuaciones con módulos

Problem 1 Encontrar el conjunto solución de $|x - 1| + |x - 3| < 4$

Solution 2 Analicemos los siguientes casos

1. $x - 1 \geq 0$ y $x - 3 \geq 0$

o sea que $x \geq 1$ y $x \geq 3$. Note que si un número es mayor que 3, entonces seguramente será mayor que 1. Por esto la región de la recta donde deben buscarse las soluciones es en $x \geq 3$. Para esta región la ecuación queda

$$x - 1 + x - 3 < 4$$

y resolviendo queda

$$x < 4$$

por lo que el conjunto solución será

$$C_{SI} = \{x : x \geq 3 \text{ y } x < 4\} = [3, 4)$$

2. $x - 1 \geq 0$ y $x - 3 < 0$

o sea que $x \geq 1$ y $x < 3$. La región de la recta donde deben buscarse las soluciones es en este caso en el intervalo $[3, 4)$. Para esta región la ecuación queda

$$x - 1 + [-(x - 3)] < 4$$

y resolviendo queda

$$2 < 4$$

esto quiere decir que para todos los puntos del intervalo considerado esta ecuación se satisfará. Por lo que el conjunto solución será

$$C_{SII} = \{x : x \geq 1 \text{ y } x < 3\} = [1, 3)$$

3. $x - 1 < 0$ y $x - 3 \geq 0$

o sea que $x < 1$ y $x \geq 3$. Note que no hay ningún valor real que satisfaga las dos condiciones a la vez. Esto indica que no hay ninguna región donde se deban buscar soluciones

4. $x - 1 < 0$ y $x - 3 < 0$

o sea que $x < 1$ y $x < 3$. o sea que $x < 1$ y $x < 3$. Note que si un número es menor que 1, entonces seguramente será menor que 3. Por esto la región de la recta donde deben buscarse las soluciones es en $x < 1$. Para esta región la ecuación queda

$$-(x - 1) + [-(x - 3)] < 4$$

y resolviendo queda

$$x > 0$$

por lo que el conjunto solución será

$$C_{SIV} = \{x : x < 1 \text{ y } x > 0\} = (0, 1)$$

En total el conjunto solución será

$$Cs = [3, 4) \cup [1, 3) \cup (0, 1) = (0, 4)$$